УДК 519.21, 517.4

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНОГО СПОДІВАННЯ ПОВНОЇ ЕНЕРГІЇ ГАРМОНІЧНОГО ОСЦИЛЯТОРА ПРИ ВИПАДКОВОМУ ІМПУЛЬСНОМУ ЗБУРЕННІ

Г. Л. Кулініч, Д. Ю. Куровський, Д. В. Петрусенко

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail:bks@univ.kiev.ua

We study the behavior, as $t \to \infty$, of the mathematical expectation of a harmonic frictionless oscillator in the presence of an external impulsive Poissonian perturbation.

Исследуется поведение при $t \to \infty$ математического ожидания полной энергии гармонического осциллятора без трения при внешнем импульсном пуассоновском возмущении.

1. Вступ. Під гармонічним осцилятором без тертя при зовнішньому періодичному збуренні із пуассонівською імпульсною амплітудою будемо розуміти тіло маси 1, рух якого описується диференціальним рівнянням другого порядку

$$\ddot{u}(t) + k^2 u(t) = q(t), \quad u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0, \tag{1}$$

де $q(t) = \xi(t)\cos\alpha t$ — зовнішня збурна сила, $\xi(t)$ — пуассонівський процес з параметром $\lambda > 0$; u_0, $\dot{u}_0$ — початкові положення і швидкість осцилятора; $u(t)$, $\dot{u}(t)$ — положення і швидкість осцилятора в момент часу $t > 0$; $k > 0$ — параметр осцилятора; $\varepsilon(t) = \frac{1}{2}\left[\dot{u}^2(t) + k^2 u^2(t)\right]$ — повна енергія осцилятора.

Відомо [1], що в детермінованих випадках:

1) $\varepsilon(t) = \varepsilon(0)$ при всіх $t > 0$, якщо $q(t) \equiv 0$; 2) повна енергія обмежена, якщо $q(t) = \cos\alpha t$, $\alpha \neq k$, і $\varepsilon(t) \sim \frac{1}{8}t^2$ при $t \to \infty$ (резонанс) при $\alpha = k$.

Модель гармонічного осцилятора з неперервним випадковим зовнішнім збуренням, в якому математичне сподівання $\mathrm{E}\varepsilon(t) \sim \sqrt{t}$ при $t \to \infty$, розглядалась у [2], $\mathrm{E}\varepsilon(t) \sim t$ — у [3], $\mathrm{E}\varepsilon(t) \sim t^{\alpha}$, $\alpha > \frac{1}{2}$, — у [4, 5], $\ln \mathrm{E}\varepsilon(t) \sim t$ — у [6].

Фазовий „портрет” гармонічного осцилятора при випадковому збуренні процесом типу „білого шуму” вздовж вектора фазової швидкості осцилятора досліджувався у роботах [7, 8], під певним кутом до вектора фазової швидкості — у [9], а при випадковому збуренні процесом типу „дробового шуму” — у [10].

У даній роботі досліджується поведінка при $t \to \infty$ математичного сподівання повної енергії гармонічного осцилятора (1) (теореми 1, 2) і осцилятора типу (1), в якому $q(t) = [\xi(t) - \mathrm{E}\,\xi(t)]\cos\alpha t$ (теореми 3, 4). Частинні результати в цьому напрямку наведено в роботі [11].

Зауваження. Оскільки [12] траєкторії пуассонівського процесу $\xi(t)$ з імовірністю 1 розривні, то рівність (1) ми не можемо розглядати для всіх $t > 0$, якщо похідні в рівнянні розуміти як звичайні похідні з імовірністю 1. Тому в рівняння (1) похідні будемо розглядати як похідні в середньоквадратичному, при цьому рівність (1) можна розглядати при всіх $t > 0$ і знайти явний вигляд розв'язку, аналогічний детермінованому випадку при неперервному зовнішньому збуренні. Більш того, у п. 3 для спрощення викладу будемо вважати, що у рівнянні (1) $u_0 = 0, \dot{u}_0 = 0$.

2. Допоміжні результати.

Означення. *Випадковий процес $\eta(t)$, $t \in [0,T]$, середньоквадратично диференційовний у точці $t_0 \in (0,T)$, якщо $\mathrm{E}\,|\eta(t)|^2 < \infty$ і*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathrm{E}\left|\frac{\eta(t_0+\Delta t)-\eta(t_0)}{\Delta t} - \dot{\eta}(t_0)\right|^2 = 0.$$

Випадкова величина $\dot{\eta}(t_0)$ називається середньоквадратичною похідною випадкового процесу $\eta(t)$ у точці t_0. Якщо існує середньоквадратична похідна процесу $\eta(t)$ у кожній точці $t \in (0,T)$, то процес $\eta(t)$ середньоквадратично диференційовний на інтервалі $(0,T)$.

Нехай $\xi(t)$, $t \geq 0$, — пуассонівський процес з параметром $\lambda > 0$. Це означає, що $\xi(t)$ — процес з незалежними приростами, $\xi(0) = 0$ і

$$\mathrm{P}\left\{\xi(t+s)-\xi(t) = k\right\} = \frac{(\lambda s)^k}{k!}\,\ell^{-\lambda s}, \quad k = 0,1,\ldots.$$

Отже, математичне сподівання $\mathrm{E}\xi(t) = \lambda t$, дисперсія $\mathrm{D}\xi(t) = \lambda t$, коваріаційна функція $B(t,s) = \mathrm{E}\xi(t)\xi(s) = \lambda^2 ts + \lambda\min(t,s)$, кореляційна функція $R(t,s) = \mathrm{E}(\xi(t) - -\mathrm{E}\xi(t))(\xi(s)-\mathrm{E}\xi(s)) = \lambda\min(t,s)$.

Розглянемо процес $\eta(t) = \int_0^t \xi(s)ds$. Оскільки траєкторії пуассонівського процесу $\xi(t)$ кусково-сталі, то вони інтегровні, процес $\eta(t)$ існує при кожному $t > 0$ і має неперервні з імовірністю 1 траєкторії, крім того, має місце наступна лема.

Лема 1. *Середньоквадратична похідна $\dot{\eta}(t) = \xi(t)$ з імовірністю 1 при всіх $t > 0$.*

Доведення. Оскільки

$$\mathrm{E}\left|\frac{1}{\Delta}\left[\int_0^{t+\Delta t}\xi(s)ds - \int_0^t \xi(s)ds\right] - \xi(t)\right|^2 = \frac{1}{(\Delta t)^2}\,\mathrm{E}\left(\int_t^{t+\Delta t}\xi(s)ds\right)^2 -$$

$$-2\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\mathrm{E}\xi(t)\xi(s)ds + \mathrm{E}\xi^2(t) = \frac{1}{(\Delta t)^2}\int_t^{t+\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\left[\lambda^2 s_1 s_2 + \lambda\min(s_1,s_2)\right]ds_1 ds_2 -$$

$$-2\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\left[\lambda^2 ts + \lambda t\right]ds + \lambda t + (\lambda t)^2 \Rightarrow \lambda^2 t^2 + \lambda t - 2\left[\lambda^2 t^2 + \lambda t\right] + \lambda^2 t^2 + \lambda t = 0$$

при $\Delta t \to 0$,

то середньоквадратична похідна $\dot{\eta}(t)$ існує і дорівнює $\xi(t)$ з імовірністю 1 при кожному $t > 0$. Процес $\eta(t)$ неперервний з імовірністю 1. Отже, він сепарабельний [12]. Тому рівність $\dot{\eta}(t) = \xi(t)$ виконується для всіх $t > 0$ з імовірністю 1.

Лема 2. *Нехай функція $g(t,s)$ невипадкова, частинні похідні $g'_t(t,s)$, $g'_s(t,s)$ неперервні за двома аргументами в області $(t \geq 0, s \geq 0)$ і $\xi(t)$ — пуассонівський процес з параметром $\lambda > 0$. Тоді має місце рівність*

$$\left(\int\limits_0^t g(t,s)\xi(s)ds\right)' = g(t,t)\xi(t) + \int\limits_0^t g'_t(t,s)\xi(s)ds$$

при всіх $t > 0$ з імовірністю 1, де похідна від інтеграла розглядається як похідна в середньоквадратичному.

Доведення. Для доведення використаємо зображення

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\int\limits_0^{t+\Delta t} g\left(t+\Delta t, s\right)\xi(s)ds - \int\limits_0^t g(t,s)\xi(s)ds\right] = \frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} g\left(t+\Delta t, s\right)\xi(s)ds +$$

$$+ \frac{1}{\Delta t}\int\limits_0^t \left[g\left(t+\Delta t, s\right) - g(t,s)\right]\xi(s)ds. \quad (2)$$

Оскільки

$$\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} g(t+\Delta t, s)\xi(s)ds - g\left(t,t\right)\xi(t) = \frac{1}{\Delta t}\left[\int\limits_t^{t+\Delta t} g\left(t+\Delta t, s\right) - g(t,s)\right]\times$$

$$\times\,\xi(s)ds + \frac{1}{\Delta t}\left[\int\limits_t^{t+\Delta t} g\left(t,s\right) - g(t,t)\right]\xi(s)ds + g(t,t)\left[\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\xi(s)ds - \xi(t)\right],$$

то, враховуючи лему 1, маємо збіжність

$$\mathrm{E}\left|\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} g(t+\Delta t, s)\xi(s)ds - g(t,t)\xi(t)\right|^2 \leq 3\left[\sup_{\substack{t\leq s_1\leq t+\Delta t\\ t\leq s\leq t+\Delta t}}\left|g'_{s_1}(s_1,s)\right|^2 + \sup_{t\leq s\leq t+\Delta t}\left|g'_s(t,s)\right|^2\right]\times$$

$$\times\,\mathrm{E}\left(\int\limits_t^{t+\Delta t}\xi(s)ds\right)^2 + 3g^2(t,t)\mathrm{E}\left[\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\xi(s)ds - \xi(t)\right]^2 \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta t \to 0.$$

Отже, маємо збіжність $(\mathrm{l.i.m.})$ у середньоквадратичному

$$\underset{\Delta t\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\,\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} g(t+\Delta t, s)\xi(s)ds = g(t,t)\xi(t) \quad (3)$$

з імовірністю 1 при кожному $t > 0$. Внаслідок того, що $g'_{s_1}(s_1, s)$ неперервна по s_1, s, в замкненій області $t \le s_1 \le t + \Delta t$, $0 \le s \le t$, вона рівномірно неперервна. Тому з оцінки

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\Delta t}\int\limits_0^t [g(t+\Delta t, s) - g(t,s)]\,\xi(s)ds - \int\limits_0^t g'_t(t,s)\xi(s)ds\right]^2 \le$$

$$\le \sup_{\substack{t\le s_1\le t+\Delta t\\ 0\le s\le t}} \left|g'_{s_1}(s_1,s) - g'_t(t,s)\right|^2 \mathrm{E}\left(\int\limits_0^t \xi(s)ds\right)^2$$

маємо збіжність

$$\underset{\Delta t\to 0}{\text{l.i.m.}}\, \frac{1}{\Delta t}\int\limits_0^t [g(t+\Delta t, s) - g(t,s)]\,\xi(s)ds = \int\limits_0^t g'_t(t,s)\xi(s)ds \tag{4}$$

з імовірністю 1 при кожному $t > 0$. Із співвідношень (2)–(4) і сепарабельності процесу $\int_0^t g(t,s)\xi(s)ds$ випливає твердження леми 2.

Наслідок. *Процес*

$$u(t) = \frac{1}{k}\int\limits_0^t \sin k(t-s)\xi(s)\cos\alpha s ds + u_0\cos kt + \frac{\dot u_0}{k}\,\sin kt, \tag{5}$$

де $\xi(t)$ — пуассонівський процес, при всіх $t > 0$ з імовірністю 1 задовольняє рівняння (1), в якому похідні $\dot u(t)$і $\ddot u(t)$ розглядаються в середньоквадратичному.

Справді, для невипадкових функцій середньоквадратичні похідні збігаються із звичайними похідними, а для підінтегрального виразу в (5) виконуються умови леми 2. Тому безпосередньою перевіркою встановлюється твердження наслідку.

3. Основні результати.

Теорема 1. *Нехай $\varepsilon(t)$ — повна енергія випадкового гармонічного осцилятора (1). Тоді:*

1) при $\alpha \ne k$, $\alpha \ne 0$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{E}\,\varepsilon(t) = \frac{\lambda^2}{4}\left[\frac{k^2+\alpha^2}{(k^2-\alpha^2)^2} + \frac{1}{|\alpha^2-k^2|}\right],$$

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t^2}\,\mathrm{E}\,\varepsilon(t) = \frac{\lambda^2}{4}\left[\frac{k^2+\alpha^2}{(k^2-\alpha^2)^2} - \frac{1}{|\alpha^2-k^2|}\right];$$

2) при $\alpha = k$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^4}\,\mathrm{E}\,\varepsilon(t) = \frac{\lambda^2}{32}.$$

Доведення. Домножимо рівність (1) на $\dot{u}(t)$ і зінтегруємо від 0 до t. Використовуючи формулу Ньютона – Лейбніца [11] (гл. V, § 2), отримуємо

$$\varepsilon(t) = \int\limits_0^t \xi(s) \cos \alpha s \dot{u}(s) ds.$$

Згідно з рівністю (5) і лемою 2

$$\dot{u}(t) = \int\limits_0^t \cos k\,(t-s) \xi(s) \cos \alpha s ds.$$

Тому

$$\mathrm{E}\,\varepsilon(t) = \lambda^2 \int\limits_0^t s y(s) \cos \alpha s ds + \lambda \int\limits_0^t y(s) \cos\, \alpha s ds, \tag{6}$$

де

$$y(t) = \int\limits_0^t s \cos k(t-s) \cos \alpha s ds.$$

Оскільки

$$y(t) = \frac{1}{2} \left[\int\limits_0^t s \cos(kt - s(k-\alpha)) ds + \int\limits_0^t s \cos(kt - s(k+\alpha)) ds \right] =$$

$$= -\frac{\alpha t}{k^2 - \alpha^2} \sin \alpha t + \frac{k^2 + \alpha^2}{(k^2-\alpha^2)^2} [\cos \alpha t - \cos kt]$$

при $\alpha \neq k$ і

$$y(t) = \frac{t^2}{4} \cos kt + \frac{t}{4k} \sin kt$$

при $\alpha = k$, то

$$\int\limits_0^t y(s) \cos \alpha s ds = -\frac{\alpha}{k^2 - \alpha^2} \left[-\frac{t}{4\alpha} \cos 2\alpha t + \frac{1}{8\alpha^2} \sin 2\alpha t \right] +$$

$$+ \frac{k^2 + \alpha^2}{(k^2 - \alpha^2)^2} \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4\alpha} \sin 2\alpha t - \frac{1}{2(k+\alpha)} \sin(k+\alpha)t - \frac{1}{2(k-\alpha)} \sin(k-\alpha)t \right] \tag{7}$$

при $\alpha \neq k$ і

$$\int\limits_o^t y(s) \cos \alpha s ds = \frac{t^3}{24} + \frac{t^2}{16k} \sin 2kt \tag{8}$$

при $\alpha = k$. Більш того,

$$\int_0^t sy(s)\cos\alpha s ds = -\frac{\alpha}{k^2-\alpha^2}\left\{-\frac{t^2}{4\alpha}\cos 2\alpha t + \frac{t}{4\alpha^2}\sin 2\alpha t + \frac{1}{8\alpha^3}\left[\cos 2\alpha t - 1\right]\right\} +$$

$$+\frac{k^2+\alpha^2}{(k^2-\alpha^2)^2}\left\{\frac{t^2}{4} + \frac{t}{4\alpha}\sin 2\alpha t + \frac{1}{8\alpha^2}[\cos 2\alpha t - 1] - \frac{t}{2(k+\alpha)}\sin(k+\alpha)t - \right.$$

$$\left. -\frac{t}{2(k-\alpha)}\sin(k-\alpha)t + \frac{1}{2(k+\alpha)^2}\left[1-\cos(k+\alpha)t\right] + \frac{1}{2(k-\alpha)^2}\left[1-\cos(k-\alpha)t\right]\right\}$$

при $k \neq \alpha$ і

$$\int_0^t sy(s)\cos\alpha s ds = \frac{t^4}{32} + \frac{t^3}{8k}\sin 2kt - \frac{t^2}{8k^2}\sin 2kt - \frac{t}{8k^3}\cos 2kt + \frac{1}{16k^4}\sin 2kt$$

при $\alpha = k$. Отже, згідно з (6)

$$\mathrm{E}\varepsilon(t) = \lambda^2\left\{\frac{t^2}{4}\frac{k^2+\alpha^2}{(k^2-\alpha^2)^2} + \frac{t^2}{4(k^2-\alpha^2)}\cos 2\alpha t + \right.$$

$$+\frac{1}{2(k^2-\alpha^2)^2}\left[t\alpha\sin 2\alpha t + \frac{1}{2}(\cos 2\alpha t - 1)\right] -$$

$$\left. -\frac{t(k^2+\alpha^2)}{2(k^2-\alpha^2)^2}\left[\frac{\sin(k+\alpha)t}{k+\alpha} + \frac{\sin(k-\alpha)t}{k-\alpha}\right]\right\} +$$

$$+\lambda\left\{\frac{t(k^2+\alpha^2)}{2(k^2-\alpha^2)^2} + \frac{t}{4(k^2-\alpha^2)}\cos 2t - \right.$$

$$\left. -\frac{k^2+\alpha^2}{2(k^2-\alpha^2)^2}\left[\frac{\sin(k+\alpha)t}{k+\alpha} + \frac{\sin(k-\alpha)t}{k-\alpha}\right]\right\}, \quad \alpha \neq k, \quad \alpha \neq 0, \tag{9}$$

$$\mathrm{E}\varepsilon(t) = \lambda^2\left\{\frac{t^4}{32} + \frac{t^3}{8k}\sin 2kt - \frac{t^2}{8k^2}\sin 2kt - \frac{t}{8k^3}\cos 2kt + \right.$$

$$\left. +\frac{1}{16k^4}\sin 2kt\right\} + \lambda\left\{\frac{t^3}{24} + \frac{t^2}{16k}\sin 2kt\right\}, \quad \alpha = k.$$

Звідси випливає твердження теореми 1.

Теорема 2. *Нехай* $\varepsilon(t)$ *— повна енергія осцилятора вигляду (1), в якому* $q(t) = \xi(t)$. *Тоді*

$$\mathrm{E}\,\varepsilon(t) = \lambda^2\left[\frac{t^2}{2k^2} - \frac{t}{k^3}\sin kt\right] + \lambda\left[\frac{3t}{4k^2} - \frac{t}{k^3}\sin kt\right]\left(\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{E}\varepsilon(t)}{t^2} = \frac{\lambda^2}{2k^2}\right).$$

Це твердження випливає з теореми 1, якщо в рівнянні (9) покласти $\alpha = 0$.

Теорема 3. *Нехай* $\varepsilon(t)$ *— повна енергія осцилятора вигляду (1), в якому* $q(t) = [\xi(t) - \mathrm{E}\,\xi(t)]\cos\alpha t$. *Тоді:*

1) $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\dfrac{\mathrm{E}\varepsilon(t)}{t} = \dfrac{\lambda}{2}\left[\dfrac{k^2+\alpha^2}{(k^2-\alpha^2)^2} + \dfrac{1}{2\,|k^2-\alpha^2|}\right]$, $\underline{\lim\limits_{t\to\infty}}\dfrac{\mathrm{E}\varepsilon(t)}{t} = \dfrac{\lambda}{2}\left[\dfrac{k^2+\alpha^2}{(k^2-\alpha^2)^2} + \dfrac{1}{2\,|k^2-\alpha^2|}\right]$ *при* $\alpha \neq k$, $\alpha \neq 0$;

2) $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\mathrm{E}\,\varepsilon(t)}{t^3} = \dfrac{\lambda}{24}$ *при* $\alpha = k$.

Доведення аналогічне доведенню теореми 1. Тільки в цьому випадку замість рівності (6) отримаємо рівність

$$\mathrm{E}\varepsilon(t) = \lambda\int\limits_0^t y(s)\cos\alpha s ds,$$

де $y(t)$ має той самий вигляд, що і в рівності (6). Тому із (7) і (8) знаходимо

$$\mathrm{E}\varepsilon(t) = \lambda\left\{\frac{t}{2}\left[\frac{k^2+\alpha^2}{(k^2-\alpha^2)^2} + \frac{1}{2(k^2-\alpha^2)}\cos\alpha t\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{k^2+3\alpha^2}{8\alpha(k^2-\alpha^2)^2}\sin 2\alpha t - \frac{k^2+\alpha^2}{(k^2-\alpha^2)^2}\left[\frac{\sin(k+\alpha)t}{2(k+\alpha)} + \frac{\sin(k-\alpha)t}{2(k-\alpha)}\right]\right\} \tag{10}$$

при $\alpha \neq k$, $\alpha \neq 0$;

$$\mathrm{E}\varepsilon(t) = \lambda\left\{\frac{t^3}{24} + \frac{t^2}{16k}\sin 2kt\right\}$$

при $\alpha = k$. Із цих рівностей випливають твердження теореми 3.

Теорема 4. *Нехай* $\varepsilon(t)$ *— повна енергія осцилятора (1), в якому* $q(t) = \xi(t) - \mathrm{E}\xi(t)$. *Тоді*

$$\mathrm{E}\varepsilon(t) = \lambda\left\{\frac{t}{k^2} - \frac{1}{k^3}\sin kt\right\}\ \left(\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{E}\varepsilon(t)}{t} = \frac{\lambda}{k^2}\right).$$

Ця теорема випливає із теореми 3, якщо в (10) покласти $\alpha = 0$.

4. Висновок. У спорудах і машинах явище резонансу відіграє дуже негативну роль: збільшення амплітуди коливань викликає зростання напруження матеріалу, а це може призвести до руйнації споруди або машини. В акустиці й радіотехніці, як відомо, роль резонансу є позитивною.

Отже, отримані в роботі результати мають теоретичне значення та практичне застосування при побудові математичних моделей та дослідженні поведінки динамічних систем при імпульсних випадкових збуреннях.

1. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1965. — 424 с.

2. *Кулініч Г.Л.* Про граничну поведінку випадкового гармонічного осцилятора // Вісн. Київ. ун-ту. Математика, механіка. — 1985. — Вип. 25. — С. 108 – 113.

3. *Papanirolan G. G.* Stochastic equations and their applications // Amer. Math. Mon. — 1973. — **80**, № 5. — P. 526 – 545.
4. *Kulinich G. L.* On the limiting behavions of a harmonic oscillator with randon external disturbance // Y.A.M.S.A. — 1995. — **8**. — P. 265 – 274.
5. *Дивнич М. Т., Куровський Д. Ю., Єршов А. В.* Асимптотичний аналіз математичного сподівання повної енергії випадкового гармонічного осцилятора // Вісн. Київ. ун-ту. Математика, механіка. — 2005. — № 3. — С. 104 – 112.
6. *Бандерский М. М., Пастур Л. А.* Об асимптотике уравнений 2-го порядка со случайным коэффициентом // Теория функций, функцион. анализ и их прил. — 1975. — Вып. 22. — С. 3 – 14.
7. *Kulinich G. L.* Qualitative analysis of the influence of random perturbations of the phase velocity of the harmonic oscillator // Random Oper. and Stochast. Equat. — 1995. — **3**, № 2 — P. 141 – 152.
8. *Кулініч Г.Л.* Якісний аналіз впливу на гармонічний осцилятор з тертям випадкових збурень типу „білого шуму” вздовж вектора фазової швидкості // Укр. мат. журн. — 1997. — **49**, № 1. — С. 36 – 47.
9. *Кулинич Г.Л., Бернацкая Ю. В.* О фазовом „портрете” гармонического осциллятора с трением, возмущенного случайным процессом типа „белого шума” // Мат. зап. — 1998. — **68**, № 4. — С. 862 – 869.
10. *Кулініч Г.Л.* Якісний аналіз поведінки гармонічного осцилятора під впливом випадкових збурень параметрів процесами типу „білого і дробового шумів” // Теорія ймовірностей та мат. статистика. — 1998. — Вип. 58. — С. 81 – 91.
11. *Кулініч Г.Л., Куровський Д. Ю., Петрусенко Д. В.* Про асимптотичну поведінку гармонічного осцилятора математичного сподівання повної енергії стохастичного гармонічного осцилятора // Мат. XI Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука. — Київ, 2006. — С. 719.
12. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1965. — 654 с.

Одержано 22.01.08