УДК 517.925

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ, БЛИЗКИМИ К СТЕПЕННЫМ

М. А. Белозерова

Одес. нац. ун-т
Украина, 65000, Одесса, ул. Дворянская, 2
e-mail: emdenl@farlep.net

We find asymptotic representations for solutions of nonautonomous second order differential equations that have close to power-type nonlinearities.

Встановлено асимптотичні зображення для розв'язків неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями, що близькі до степеневих.

В данной работе рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{1}$$

в котором $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, — непрерывная функция, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[$, $i = 0, 1$, — строго монотонные, дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{\substack{z\to Y_i \\ z\in\Delta_{Y_i}}} \frac{z\varphi_i'(z)}{\varphi_i(z)} = \sigma_i, \quad \limsup_{\substack{z\to Y_i \\ z\in\Delta_{Y_i}}} \left|\frac{z\varphi_i''(z)}{\varphi_i'(z)}\right| < +\infty, \quad i = 0, 1, \tag{2}$$

$$Y_i = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } \pm\infty, \end{cases} \qquad \Delta_{Y_i} = \begin{cases} \text{либо}^1 & [y_i^0,\ Y_i[, \\ \text{либо} &]Y_i,\ y_i^0], \end{cases}$$

$$\sigma_i \in \mathbb{R}, \quad \text{причем} \quad \sigma_0 + \sigma_1 \ne 1. \tag{3}$$

В силу первого из условий (2) каждая из функций φ_i, $i \in \{0, 1\}$, в некотором смысле близка к степенной, а именно, имеет вид $\varphi_i(z) = |z|^{\sigma_i}\theta_i(z)$, где $\theta_i : \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[$ такова, что

$$\lim_{\substack{z\to Y_i \\ z\in\Delta_{Y_i}}} \frac{z\theta_i'(z)}{\theta_i(z)} = 0. \tag{4}$$

[1] При $Y_i = +\infty$ ($Y_i = -\infty$) считаем $y_i^0 > 0$ ($y_i^0 < 0$) соответственно.

Будем говорить, что функция $\varphi_i(z)$, $i \in \{0,1\}$, удовлетворяет условию S_i, если для любой непрерывно дифференцируемой функции $L : \Delta_{Y_i} \rightarrow]0;+\infty[$ такой, что

$$\lim_{\substack{z \to Y_i \\ z \in \Delta_{Y_i}}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = 0, \tag{5}$$

имеет место соотношение

$$\theta_i(zL(z)) = \theta_i(z)(1+o(1)) \quad \text{при} \quad z \to Y_i \quad (z \in \Delta_{Y_i}).$$

Условию S_i заведомо удовлетворяют функции $\varphi_i(z)$, для которых $\theta_i(z)$ имеют конечный предел при $z \to Y_i$, а также функции вида $|z|^{\sigma_i}|\ln|z||^{\mu_i}$, $|z|^{\sigma_i}|\ln|\ln|z|||^{\mu_i}$ и другие. Однако в силу произвольности функции L такое условие может быть сложным для проверки. Поэтому в некоторых случаях целесообразно пользоваться несколько иными условиями, например условиями вида

$$\lim_{\substack{z \to Y_i \\ z \in \Delta_{Y_i}}} \frac{z \ln z \theta_i'(z)}{\theta_i(z)} = \text{const}, \tag{6}$$

которые являются достаточными для того, чтобы функция $\varphi_i(z)$ удовлетворяла условию S_i.

Решение y уравнения (1) будем называть $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решением, если

$$y^{(i)} : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i, \quad i = 0, 1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \tag{7}$$

В настоящей работе исследуются $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решения уравнения (1), где $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. Уравнения такого вида ранее исследовались (см. [1–11]) лишь для случаев, когда функция φ_1 удовлетворяет условию S_1, причем в основном для $\varphi_1(y') \equiv 1$ (см. [1, 2, 6–11]). В данной работе никакие дополнительные ограничения, кроме (2), на функцию φ_1 не накладываются.

В силу вида уравнения (1) каждое его $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решение, где $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, является строго монотонным вместе со своей первой производной. Поэтому очевидно, что при изучении таких решений необходимо считать, что

$$\begin{aligned} &y_1^0 > 0, \quad \text{если} \quad \Delta_{Y_0} = [y_0^0, Y_0[, \\ &y_1^0 < 0, \quad \text{если} \quad \Delta_{Y_0} =]Y_0, y_0^0]. \end{aligned} \tag{8}$$

Введем следующие обозначения, положив

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{при} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega & \text{при} \quad \omega < +\infty, \end{cases}$$

$$I_1^0(t) = \int\limits_{A_\omega}^{t} p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0}\,d\tau, \quad A_\omega = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \int_a^\omega p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0}\,d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{если} \quad \int_a^\omega p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0}\,d\tau < +\infty. \end{cases}$$

Теорема. *Пусть выполняются условия (8). Тогда для существования $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений, $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$, уравнения (1) необходимо выполнение условий*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)(I_1^0(t))'}{I_1^0(t)} = \frac{\sigma_0 + \sigma_1 - 1}{1 - \lambda_0}, \ \alpha_0\lambda_0 y_0^0 > 0, \ \alpha_0 y_1^0(1 - \sigma_0 - \sigma_1)I_1^0(t) > 0 \text{ при } t \in [b, \omega[, \quad (9)$$

$$Y_i = \begin{cases} \pm\infty, & \text{если} \quad \alpha_0\, y_1^0 \lambda_0^i > 0, \\ 0, & \text{если} \quad \alpha_0\, y_1^0 \lambda_0^i < 0, \end{cases} \qquad \text{где} \quad \lambda_0^i = \begin{cases} \lambda_0, & \text{если} \quad i = 0, \\ 1, & \text{если} \quad i = 1. \end{cases} \tag{10}$$

Если же функция φ_0 удовлетворяет условию S_0, и, кроме того,

$$\lambda_0 \neq \sigma_1 - 1 \quad \text{либо} \quad \lambda_0(\sigma_0 + \sigma_1 - 1) > 0, \tag{11}$$

то условия (9), (10) являются также и достаточными для существования таких решений уравнения (1), причем в этом случае каждое $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решение, $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$, имеет при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$\begin{gathered} \frac{y'(t)}{\varphi_1(y'(t))|y'(t)|^{\sigma_0}} \sim \alpha_0 \left|\frac{\lambda_0}{1 - \lambda_0}\right|^{-\sigma_0} (1 - \sigma_0 - \sigma_1) I_1^0(t)\theta_0\left(y_0^0|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}}\right), \\ \frac{y'(t)}{y(t)} \sim \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}. \end{gathered} \tag{12}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y : [t_0, \omega[\to \mathbb{R}$ — $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решение уравнения (1), $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$. Тогда, согласно (7), имеют место асимптотические представления

$$\frac{y^{(i+1)}(t)}{y^{(i)}(t)} = \frac{\lambda_0^i}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \quad i = 0, 1, \tag{13}$$

откуда с учетом (7) и (1) получаем (10), второе из условий (9), а также второе из представлений (12). Кроме того, в силу (13) имеет место представление

$$y(t) = y_0^0|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}} L\left(y_0^0|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}}\right),$$

где $L : \Delta_{Y_0} \to]0; +\infty[$ удовлетворяет (5). В случае, когда функция φ_0 удовлетворяет условию S_0, это означает, что

$$\theta_0(y(t)) = \theta_0\left(y_0^0|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}}\right)(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{14}$$

Используя (1) и (13), получаем

$$\frac{y''(t)}{\varphi_1(y'(t))|y'(t)|^{\sigma_0}\theta_0(y(t))} = \alpha_0 \left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right|^{-\sigma_0} p(t)\,|\pi_\omega(t)|^{\sigma_0}\,[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{15}$$

Тогда из равенства

$$\left(\frac{y'(t)|y'(t)|^{-\sigma_0}}{\varphi_1(y'(t))\theta_0(y(t))}\right)' = \frac{y''(t)|y'(t)|^{-\sigma_0}}{\varphi_1(y'(t))\theta_0(y(t))}\left(1 - \sigma_0 - \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)}\,\frac{y(t)\theta_0'(y(t))}{\theta_0(y(t))} - \frac{y'(t)\varphi_1'(y'(t))}{\varphi_1(y'(t))}\right)$$

с учетом (15), (2), (7), (3), (6) и определения функции $I_1^0(t)$ при $\int_a^\omega p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0}\,d\tau = +\infty$ следует

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_0}\operatorname{sign} y'(t)}{\varphi_1(y'(t))\theta_0(y(t))} = \alpha_0\left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right|^{-\sigma_0}(1 - \sigma_0 - \sigma_1)I_1^0(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{16}$$

В случае же, когда $\int_a^\omega p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0}\,d\tau < +\infty$, получаем либо (16), либо

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_0}\operatorname{sign} y'(t)}{\varphi_1(y'(t))\theta_0(y(t))} = c \neq 0. \tag{17}$$

Покажем, что (17) не может иметь места. Поскольку $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$, в силу второго из условий (7) и (2) функция $\dfrac{y'(t)}{\varphi_1(y'(t))|y'(t)|^{\sigma_0}}$ имеет либо нулевой, либо бесконечный предел при $t \uparrow \omega$. Если бы выполнялось условие (17), то функция $\theta_0(y(t))$ имела бы соответственно нулевой либо бесконечный предел при $t \uparrow \omega$. Тогда, использовав правило Лопиталя, (15), (2), (7), (3) и (6), получили бы

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y'(t)}{\varphi_1(y'(t))|y'(t)|^{\sigma_0}\theta_0(y(t))} = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left[\frac{1}{\theta_0(y(t))}\right]'}{\left[\frac{\varphi_1(y'(t))|y'(t)|^{\sigma_0}}{y'(t)}\right]'} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega}\frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)}\,\frac{y'(t)}{\theta_0(y(t))\varphi_1(y'(t))|y'(t)|^{\sigma_0}}\,\frac{y(t)\theta_0'(y(t))}{\theta_0(y(t))}\,\frac{1}{1 - \sigma_0 - \frac{y'(t)\varphi_1'(y'(t))}{\varphi_1(y'(t))}} = 0,$$

что противоречит (17). Таким образом, (16) имеет место в обоих случаях. Если функция φ_0 удовлетворяет условию S_0, то из (16) в силу (14) следует первое из представлений (12). Кроме того, используя (16) и (15), имеем

$$\frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \frac{\pi_\omega(t)(I_1^0(t))'}{I_1^0(t)(1 - \sigma_0 - \sigma_1)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

откуда с учетом (13) следует первое и третье из условий (9).

Достаточность. Пусть φ_0 удовлетворяет условию S_0 и наряду с (9), (10) выполняется условие (11). Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \int_{Y_1^*}^{z} \frac{d\tau}{\varphi_1(\tau)|\tau|^{\sigma_0}}, \quad \text{где} \quad Y_1^* = \begin{cases} y_1^0, & \text{если} \quad \left| \int_{y_1^0}^{Y_1} \frac{dz}{\varphi_1(z)|z|^{\sigma_0}} \right| = +\infty, \\ Y_1, & \text{если} \quad \left| \int_{y_1^0}^{Y_1} \frac{dz}{\varphi_1(z)|z|^{\sigma_0}} \right| < +\infty. \end{cases}$$

Поскольку Φ возрастает на Δ_{Y_1} и $\lim\limits_{\substack{z\to Y_1 \\ z\in\Delta_{Y_1}}} \Phi(z) = \Phi_1$, где

$$\Phi_1 = \begin{cases} \pm\infty, & \text{если} \quad Y_1^* = y_1^0, \\ 0, & \text{если} \quad Y_1^* = Y_1, \end{cases}$$

то для нее существует обратная функция Φ^{-1}, заданная в силу (2) на промежутке

$$\Delta_{\Phi_1} = \begin{cases} [C_{\varphi_1}, \Phi_1[, & \text{если} \quad C_{\varphi_1} < \Phi_1, \\ ]\Phi_1, C_{\varphi_1}], & \text{если} \quad C_{\varphi_1} > \Phi_1, \end{cases} \qquad \text{где} \quad C_{\varphi_1} = \int_{Y_1^*}^{y_1^0} \frac{dz}{\varphi_1(z)|z|^{\sigma_0}},$$

причем

$$\lim_{\substack{z\to\Phi_1 \\ z\in\Delta_{\Phi_1}}} \Phi^{-1}(z) = Y_1. \tag{18}$$

Кроме того, согласно правилу Лопиталя

$$\lim_{\substack{z\to Y_1 \\ z\in\Delta_{Y_1}}} \frac{\Phi(z)\varphi_1(z)|z|^{\sigma_0}}{z} = \frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}. \tag{19}$$

Уравнение (1) с помощью преобразования

$$\Phi(y'(t)) = \alpha_0 \left|\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}\right|^{-\sigma_0} I_1^0(t)\theta_0\left(Y^{[0]}(t)\right)[1+z_1(x)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}[1+z_2(x)], \tag{20}$$

где

$$x = \beta\ln|\pi_\omega(t)|, \quad \beta = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \omega = +\infty, \\ -1 & \text{при} \quad \omega < +\infty, \end{cases} \qquad Y^{[0]}(t) = y_0^0|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}, \tag{21}$$

сведем с учетом (9) и (10) к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} z_1' &= \beta\left[K(x,z_1,z_2)G(x)|1+z_2|^{-\sigma_0} - (1+z_1)(G(x)+BM(x))\right], \\ z_2' &= \beta(1+z_2)\left[\alpha_0\left|B(1+z_2)\right|^{-\sigma_0}K(x,z_1,z_2)F(x,z_1)G(x) - B(z_2+1)+1\right], \end{aligned} \tag{22}$$

в которой

$$B = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \quad G(x) = \frac{\pi_\omega(t(x))(I_0^1(t(x)))'}{I_0^1(t(x))}, \quad M(x) = \frac{Y^{[0]}(t(x))\theta_0'\left(Y^{[0]}(t(x))\right)}{\theta_0\left(Y^{[0]}(t(x))\right)},$$

$$K(x,z_1,z_2) = \frac{\theta_0(Y(t(x),z_1,z_2))}{\theta_0\left(Y^{[0]}(t(x))\right)},$$

$$F(x,z_1) = Y^{[1]}(t(x),z_1)I_0^1(t(x))\theta_0\left(Y^{[0]}(t(x))\right)\varphi_1(Y^{[1]}(t(x),z_1))|Y^{[1]}(t(x),z_1)|^{\sigma_0-2},$$

$$Y^{[1]}(t,z_1) = \Phi^{-1}\left(\alpha_0|B|^{-\sigma_0}I_0^1(t)\theta_0\left(Y^{[0]}(t)\right)(1+z_1)\right), \quad Y(t,z_1,z_2) = \frac{Y^{[1]}(t,z_1)\pi_\omega(t)}{B(1+z_2)},$$

где $t(x)$ — функция, обратная для $x = \beta\ln|\pi_\omega(t)|$.

В силу (18), (8), (9) и (10) $\lim\limits_{t\uparrow\omega} Y^{[1]}(t,\xi) = Y_1$ при $|\xi| \le \dfrac{1}{2}$. С использованием правила Лопиталя и (2) для каждого такого ξ находим

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{Y^{[1]}(t,\xi)}{I_1^0(t)\theta_0\left(Y^{[0]}(t)\right)\varphi_1(Y^{[1]}(t,\xi))|Y^{[1]}(t,\xi)|^{\sigma_0}} = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left[\dfrac{Y^{[1]}(t,\xi)}{\varphi_1(Y^{[1]}(t,\xi))|Y^{[1]}(t,\xi)|^{\sigma_0}}\right]'}{\left(I_1^0(t)\theta_0\left(Y^{[0]}(t)\right)\right)'} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega}\alpha_0|B|^{-\sigma_0}(1+\xi)\left[1-\sigma_0-\frac{Y^{[1]}(t,\xi)\varphi_1'(Y^{[1]}(t,\xi))}{\varphi_1(Y^{[1]}(t,\xi))}\right] = \alpha_0|B|^{-\sigma_0}(1+\xi)(1-\sigma_0-\sigma_1). \tag{23}$$

Тогда с учетом (4) и (9) при $t\uparrow\omega$ будем иметь

$$\frac{\pi_\omega(t)\left(Y(t,\xi,0)\right)'}{Y(t,\xi,0)} =$$

$$= 1+\alpha_0|B|^{\sigma_0}(1+\xi)G(x)F(x(t),\xi)\left(1+\frac{\lambda_0 Y^{[0]}(t)\theta_0'\left(Y^{[0]}(t)\right)}{(\lambda_0-1)G(x)\theta_0\left(Y^{[0]}(t)\right)}\right) \sim \frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}. \tag{24}$$

Это означает, что $|Y(t,\xi,0)| = |\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0(1+o(1))}{\lambda_0-1}}$ при $t\uparrow\omega$. Поскольку в силу монотонности функции Φ^{-1} имеет место одно из неравенств

$$\frac{1}{2}\left|Y\left(t,\frac{1}{2},0\right)\right| < |Y(t,z_1,z_2| < \frac{3}{2}\left|Y\left(t,\frac{3}{2},0\right)\right| \quad \text{при} \quad |z_i| \le \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}\left|Y\left(t,\frac{3}{2},0\right)\right| < |Y(t,z_1,z_2)| < \frac{3}{2}\left|Y\left(t,\frac{1}{2},0\right)\right| \quad \text{при} \quad |z_i| \le \frac{1}{2},$$

учитывая (9) и (10), можно выбрать число $t_0 \in [a,\omega[$ так, чтобы $Y^{[0]}(t) \in \Delta_{Y_0}$, $Y^{[1]}(t,z_1) \in \Delta_{Y_1}$, $Y(t,z_1,z_2) \in \Delta_{Y_0}$ при $t \in [t_0,\omega[$ и $|z_i| \le \dfrac{1}{2}$, $i=1,2$.

Теперь рассмотрим систему дифференциальных уравнений (22) на множестве

$$\Omega = [x_0,+\infty[\times D, \quad \text{где} \quad x_0 = \beta\ln|\pi_\omega(t_0)|, \quad D = \left\{(z_1,z_2) : |z_i| \le \frac{1}{2},\ i=1,2\right\}.$$

На этом множестве правые части системы (22) являются непрерывными функциями по переменной x и дважды непрерывно дифференцируемыми по переменным z_1, z_2, причем

$$F'_{z_1}(x,z_1) = \alpha_0|B|^{-\sigma_0}F^2(x,z_1)\left(\sigma_0 - 1 + \frac{Y^{[1]}(t(x),z_1)\varphi_1'(Y^{[1]}(t(x),z_1))}{\varphi_1(Y^{[1]}(t(x),z_1))}\right),$$

$$F''_{z_1^2}(x,z_1) = \frac{2(F'_{z_1}(x,z_1))^2}{F(x,z_1)} + |B|^{-2\sigma_0}F^2(x,z_1)\frac{F(x,z_1)Y^{[1]}(t(x),z_1)\varphi_1'(Y^{[1]}(t(x),z_1))}{\varphi_1(Y^{[1]}(t(x),z_1))}\times$$
$$\times\left[1 - \frac{Y^{[1]}(t(x),z_1)\varphi_1'(Y^{[1]}(t(x),z_1))}{\varphi_1(Y^{[1]}(t(x),z_1))} + \frac{Y^{[1]}(t(x),z_1)\varphi_1''(Y^{[1]}(t(x),z_1))}{\varphi_1'(Y^{[1]}(t(x),z_1))}\right],$$

$$K'_{z_1}(x,z_1,z_2) = \alpha_0|B|^{-\sigma_0}F(x,z_1)\,\frac{Y(t(x),z_1,z_2)\theta_0'\left(Y(t(x),z_1,z_2)\right)}{\theta_0\left(Y^{[0]}(t(x))\right)},$$

$$K'_{z_2}(x,z_1,z_2) = -\frac{Y(t(x),z_1,z_2)\theta_0'\left(Y(t(x),z_1,z_2)\right)}{(1+z_2)\theta_0\left(Y^{[0]}(t(x))\right)}, \quad K''_{z_1^2}(x,z_1,z_2) = K'_{z_1}(x,z_1,z_2)\times$$
$$\times\,\alpha_0|B|^{-\sigma_0}F(x,z_1)\left[\frac{Y(t(x),z_1,z_2)\theta_0''\left(Y(t(x),z_1,z_2)\right)}{\theta_0'(Y(t(x),z_1,z_2))} + \frac{F'_{z_1}(x,z_1)}{\alpha_0|B|^{-\sigma_0}F(x,z_1)} + 1\right],$$

$$K''_{z_2^2}(x,z_1,z_2) = -\frac{K'_{z_2}(x,z_1,z_2)}{1+z_2}\left(2 + \frac{Y(t(x),z_1,z_2)\theta_0''(Y(t(x),z_1,z_2))}{(1+z_2)\theta_0'(Y(t(x),z_1,z_2))}\right),$$

$$K''_{z_2,z_1}(x,z_1,z_2) = -\frac{K'_{z_1}(x,z_1,z_2)}{1+z_2}\left[\frac{Y(t(x),z_1,z_2)\theta_0''(Y(t(x),z_1,z_2))}{\theta_0'(Y(t(x),z_1,z_2))} + 1\right].$$

Разложив при каждом фиксированном $x \in [x_0,+\infty[$ функцию $F(x,z_1)$ по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа в окрестности $z_1 = 0$ до второго порядка включительно, функцию $K(x,z_1,z_2)$ — в окрестности точки $(z_1,z_2) = (0,0)$, а функцию $|1+z_2|^{-\sigma_0}$ — в окрестности точки $z_2 = 0$, перепишем систему (22) в виде

$$\begin{aligned} z_1' &= F_1(x) + A_{11}(x)z_1 + A_{12}(x)z_2 + R_1(x,z_1,z_2),\\ z_2' &= F_2(x) + A_{21}(x)z_1 + A_{22}(x)z_2 + R_2(x,z_1,z_2), \end{aligned} \tag{25}$$

где

$$F_1(x) = \beta\left[G(x)(K(x,0,0)-1) - M(x)\right],$$

$$F_2(x) = \beta\left[\alpha_0\,|B|^{-\sigma_0}\,K(x,0,0)F(x,0)G(x) - B + 1\right],$$

$$A_{11}(x) = \beta\left[G(x)(K'_{z_1}(x,0,0)-1) - BM(x)\right],\ A_{12}(x) = \beta G(x)\left[K'_{z_2}(x,0,0) - \sigma_0 K(x,0,0)\right],$$

$$A_{21}(x) = \beta\alpha_0\,|B|^{-\sigma_0}\,G(x)\left[K'_{z_1}(x,0,0)F(x,0) + K(x,0,0)F'_{z_1}(x,0)\right],$$

$$A_{22}(x) = \beta F_2(x) - \beta\left[\alpha_0\,|B|^{-\sigma_0}\,F(x,0)G(x)(\sigma_0 K(x,0,0) - K'_{z_2}(x,0,0)) + B\right],$$

$$R_1(x,z_1,z_2) = \beta G(x)\times$$

$$\times\left((1+z_2)^{-\sigma_0}\sum_{i,j=1}^{2}K''_{z_iz_j}(x,\xi_1,\xi_2)z_iz_j - \sigma_0\sum_{i=1}^{2}K'_{z_i}(x,0,0)z_iz_2 + \frac{\sigma_0(\sigma_0+1)}{|1+\xi_3|^{\sigma_0+2}}K(x,0,0)z_2^2\right),$$

$$R_2(x,z_1,z_2) = \beta A_{21}(x)z_1z_2 + \beta(A_{22}(x) - F_2(x))z_2^2 + \beta\alpha_0|B|^{-\sigma_0}G(x)\times$$

$$\times\left[\frac{F(x,0)+F'(x,0)z_1}{2}\left(\frac{\sigma_0(\sigma_0+1)}{|1+\xi_3|^{\sigma_0+2}}\left(K(x,0,0) + \sum_{i=1}^{2}K'_{z_i}(x,0,0)z_i\right)z_2^2 - \right.\right.$$

$$\left. -2\sigma_0\sum_{i=1}^{2}K'_{z_i}(x,0,0)z_iz_2 + |1+z_2|^{-\sigma_0}\sum_{i,j=1}^{2}K'_{z_iz_j}(x,\xi_4,\xi_5)z_iz_j\right) +$$

$$+ F'(x,0)\left(\sum_{i=1}^{2}K'_{z_i}(x,0,0)z_iz_1 - \sigma_0 K(x,0,0)z_2z_1\right) +$$

$$\left. + F''(x,\xi_6)K(x,z_1z_2)|1+z_2|^{-\sigma_0}z_1^2\right],$$

$$|\xi_i| < |z_i| \le \frac{1}{2}, \quad i = 1,\ldots,6.$$

Учитывая (24) и то, что функция $\varphi_0(z)$ удовлетворяет условию S_0, имеем

$$\theta_0\left(Y(t(x),0,0)\right) = \theta_0\left(Y^{[0]}(t(x))\right)(1+o(1)) \quad \text{при} \quad x\to+\infty.$$

Отсюда $\lim\limits_{x\to+\infty}K(x,0,0) = 1$ и согласно (1.2) $\lim\limits_{x\to+\infty}K'_{z_i}(x,0,0) = 0$, $i\in\{1,2\}$. Поэтому в силу (23), (9) и (10) получаем

$$\lim_{x\to+\infty}F_i(x) = 0, \quad i = 1,2,$$

предельная матрица коэффициентов линейной части системы (25) имеет вид

$$A = \lim_{x\to+\infty} \begin{pmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\beta(\sigma_0+\sigma_1-1)}{\lambda_0-1} & \dfrac{\beta\sigma_0(\sigma_0+\sigma_1-1)}{\lambda_0-1} \\ \dfrac{\beta}{1-\lambda_0} & \dfrac{\beta(\sigma_0+\lambda_0)}{1-\lambda_0} \end{pmatrix}$$

и

$$\lim_{|z_1|+|z_2|\to 0} \frac{R_i(x,z_1,z_2)}{|z_1|+|z_2|} = 0, \quad i=1,2, \quad \text{равномерно по} \quad x \in [x_0,+\infty[.$$

Запишем для матрицы A характеристическое уравнение $\det[A-\nu E_2]=0$, где E_2 — единичная матрица второго порядка:

$$\nu^2 - \frac{\beta(\lambda_0-\sigma_1+1)}{(1-\lambda_0)}\nu - \lambda_0\frac{(\sigma_0+\sigma_1-1)}{(1-\lambda_0)^2} = 0.$$

В силу (11) это уравнение не имеет корней с нулевой действительной частью. Таким образом, для системы дифференциальных уравнений (25) выполнены все условия теоремы 2.1 из [12]. Согласно этой теореме система (22) имеет хотя бы одно решение $\{z_i\}_{i=1}^2 : [x_1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x_1 \ge x_0$, стремящееся к нулю при $x\to+\infty$. Ему в силу замен (20), (21) соответствует решение y уравнения (1), допускающее при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления

$$\Phi(y'(t)) \sim \alpha_0\left|\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}\right|^{-\sigma_0} I_1^0(t)\theta_0\left(y_0^0|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}\right), \quad \frac{y'(t)}{y(t)} \sim \frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}.$$

Используя (19), первое из них перепишем в виде

$$\frac{y'(t)}{\varphi_1(y'(t))|y'(t)|^{\sigma_0}} \sim \alpha_0\left|\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}\right|^{-\sigma_0}(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1^0(t)\theta_0\left(y_0^0|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}\right) \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Отсюда с учетом (1), условия S_0, (9), (10) следует, что y является $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-решением уравнения (1).

Теорема доказана.

В качестве примера рассмотрим на промежутке $]0,+\infty[$ дифференциальное уравнение

$$y'' = ct^\gamma|y|^{\sigma_0}|\ln|y||^{\mu_0}|y'|^{\sigma_1}\exp\left(\sqrt{|\ln|y'||}\right), \tag{26}$$

где $c\in R\setminus\{0\}$, $\sigma_0,\sigma_1,\mu_0\in R$, $\sigma_0+\sigma_1\ne 1$. Это уравнение является уравнением (1), в котором $\alpha_0=\operatorname{sign} c$, $p(t)=|c|t^\gamma$, $\varphi_0(z)=|z|^{\sigma_0}|\ln|z||^{\mu_0}$, $\varphi_1(z)=|z|^{\sigma_1}\exp\left(\sqrt{|\ln|z||}\right)$. Очевидно, что в данном случае функция φ_0 удовлетворяет (7), а значит и условию S_0, в то время как функция φ_1 не удовлетворяет условию S_1. Таким образом, уравнение (26) допускает применение полученной теоремы. При ее использовании нам потребуются следующие вспомогательные обозначения:

$$c_0 = \frac{c(1-\sigma_0-\sigma_1)}{\gamma+\sigma_0+1}\left[\frac{|c|^{\sigma_0+\sigma_1}|1-\sigma_0-\sigma_1|^{\sigma_1-\mu_0+2\sigma_0}}{|\gamma+\sigma_0+1|^{\sigma_0+\sigma_1}|\gamma-\sigma_1+2|^{\mu_0-\sigma_0}}\right]^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}},$$

$$c_1 = \frac{c(1-\sigma_0-\sigma_1)}{\sigma_0+1}\left[\frac{|c|^{\sigma_0+\sigma_1}|1-\sigma_0-\sigma_1|^{\sigma_1-\mu_0+2\sigma_0}}{|\sigma_0+1|^{\sigma_0+\sigma_1}|2-\sigma_1|^{\mu_0-\sigma_0}}\right]^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}.$$

Сначала исследуем вопрос о наличии и асимптотике $P_{+\infty}(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений, где $\lambda_0 \in \in R\setminus\{0, 1\}$. При этом можем считать, что $a = 2$.

В данном случае

$$\pi_\omega(t) = t, \quad I_1^0(t) = |c|\int_{A_{+\infty}}^{t} \tau^{\gamma+\sigma_0}d\tau.$$

Поэтому с учетом выбора предела интегрирования $A_{+\infty}$ получим при $t \to +\infty$ представление

$$I_1^0(t) \sim \begin{cases} \dfrac{|c|}{\gamma+\sigma_0+1}t^{\gamma+\sigma_0+1}, & \text{если} \quad \gamma+\sigma_0 \neq -1, \\ |c|\ln t, & \text{если} \quad \gamma+\sigma_0 = -1. \end{cases} \tag{27}$$

Кроме того,

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t\left(I_1^0(t)\right)'}{I_1^0(t)} = \gamma+\sigma_0+1. \tag{28}$$

Тогда в силу (27) и (28) из теоремы вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Для существования $P_{+\infty}(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений, $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$, уравнения (26) необходимо, а если*

$$\frac{\gamma+2-\sigma_1}{\sigma_0+\gamma+1} \neq \sigma_1 - 1 \quad \textit{либо} \quad (1-\sigma_0-\sigma_1)(1-\sigma_1) > 0, \tag{29}$$

то и достаточно выполнения условий

$$\lambda_0 = \frac{\gamma+2-\sigma_1}{\sigma_0+\gamma+1}, \quad \gamma-\sigma_1 \neq -2, \quad \sigma_0+\gamma+1 \neq 0. \tag{30}$$

Более того, для каждого такого $P_{+\infty}\left(Y_0, Y_1, \dfrac{\gamma+2-\sigma_1}{\sigma_0+\gamma+1}\right)$-решения имеют место при $t \to +\infty$ асимптотические представления

$$y'(t) \sim c_0\left[t^{\gamma+\sigma_0+1}\ln^{\mu_0}t\exp\left(\operatorname{sign}(\sigma_0-\sigma_1-1)\sqrt{\left|\frac{\gamma+\sigma_0+1}{1-\sigma_0-\sigma_1}\right|\ln t}\right)\right]^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}},$$

$$y(t) \sim \frac{c_0(1-\sigma_0-\sigma_1)}{\gamma-\sigma_1+2}\left[t^{2+\gamma-\sigma_1}\ln^{\mu_0}t\exp\left(\operatorname{sign}(\sigma_0-\sigma_1-1)\sqrt{\left|\frac{\gamma+\sigma_0+1}{1-\sigma_0-\sigma_1}\right|\ln t}\right)\right]^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}.$$

Выбрав теперь в качестве ω любое число из промежутка $(0, +\infty)$, исследуем вопрос о наличии и асимптотике $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений уравнения (26), где $\lambda_0 \in R \setminus \{0, 1\}$. В этом случае $\pi_\omega(t) = t - \omega$, $I_1^0(t) = |A| \int_{A_\omega}^t \tau^\gamma (\omega - \tau)^{\sigma_0} \, d\tau$. Поэтому с учетом выбора пределов интегрирования получим при $t \uparrow \omega$ представления

$$I_1^0(t) \sim \begin{cases} -\dfrac{|A|\omega^\gamma}{\sigma_0 + 1} (\omega - t)^{\sigma_0 + 1}, & \text{если} \quad \sigma_0 \neq -1, \\ -|A|\omega^\gamma \ln(\omega - t), & \text{если} \quad \sigma_0 = -1. \end{cases} \tag{31}$$

Кроме того,

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{(\omega - t) \left(I_1^0(t)\right)'}{I_1^0(t)} = \sigma_0 + 1. \tag{32}$$

Тогда, используя теорему, получаем такое утверждение.

Следствие 2. *Для существования $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений, $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, уравнения (26) необходимо, а если*

$$\frac{2 - \sigma_1}{\sigma_0 + 1} \neq \sigma_1 - 1 \quad \textit{либо} \quad (1 - \sigma_0 - \sigma_1)(1 - \sigma_1) > 0, \tag{33}$$

то и достаточно выполнения условий

$$\lambda_0 = \frac{2 - \sigma_1}{\sigma_0 + 1}, \quad \sigma_1 - 2 \neq 0, \quad \sigma_0 + 1 \neq 0. \tag{34}$$

Более того, для каждого такого $P_\omega\left(Y_0, Y_1, \dfrac{2 - \sigma_1}{\sigma_0 + 1}\right)$-решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$y'(t) \sim -c_1 \left[t^{\sigma_0 + 1} |\ln(\omega - t)|^{\mu_0} \exp\left(\operatorname{sign}(\sigma_0 - \sigma_1 - 1) \sqrt{\left| \frac{\sigma_0 + 1}{1 - \sigma_0 - \sigma_1} \ln(\omega - t) \right|} \right) \right]^{\frac{1}{1 - \sigma_0 - \sigma_1}},$$

$$y(t) \sim \frac{c_1 (1 - \sigma_0 - \sigma_1)}{2 - \sigma_1} \times$$

$$\times \left[(\omega - t)^{2 - \sigma_1} \ln^{\mu_0}(\omega - t) \exp\left(\operatorname{sign}(\sigma_0 - \sigma_1 - 1) \sqrt{\left| \frac{\sigma_0 + 1}{1 - \sigma_0 - \sigma_1} \ln(\omega - t) \right|} \right) \right]^{\frac{1}{1 - \sigma_0 - \sigma_1}}.$$

Теперь рассмотрим вопрос о существовании и асимптотике при $t \downarrow \omega$, $0 \leq \omega < +\infty$, решений, определенных в правой окрестности ω. Для исследования таких решений выполним замену

$$z(\tau) = y(t), \quad \omega - \tau = t - \omega. \tag{35}$$

В результате замены получим уравнение

$$z'' = A(2\omega - \tau)^{\gamma}|z|^{\sigma_0}|\ln|z||^{\mu_0}|z'|^{\sigma_1}\exp\left(\sqrt{|\ln|z'||}\right), \tag{36}$$

которое теперь следует исследовать при $\tau \uparrow \omega$. Решение уравнения (26), соответствующее при этом $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решению уравнения (36), будем называть $P_{\omega+}(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решением.

Поскольку при $0 < \omega < +\infty$ $\lim\limits_{\tau\uparrow\omega}(2\omega-\tau)^{\gamma} = \omega^{\gamma}$, для уравнения (36) имеют место предельные соотношения (31) и (32). В этом случае вопрос об асимптотике при $t \downarrow \omega$ $P_{\omega+}(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений уравнения (26) может быть решен на основании теоремы с учетом замен (35). Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Следствие 3. *Для существования $P_{\omega+}(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений, $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, уравнения (26) необходимо, а если выполняется условие (33), то и достаточно выполнения условий (34). Более того, для каждого такого $P_{\omega+}\left(Y_0, Y_1, \dfrac{2-\sigma_1}{\sigma_0+1}\right)$-решения имеют место при $t \downarrow \omega$ асимптотические представления*

$$y'(t) \sim -c_1\left[t^{\sigma_0+1}|\ln(t-\omega)|^{\mu_0}\exp\left(\operatorname{sign}(\sigma_0-\sigma_1-1)\sqrt{\left|\frac{\sigma_0+1}{1-\sigma_0-\sigma_1}\ln(t-\omega)\right|}\right)\right]^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}},$$

$$y(t) \sim \frac{c_1(1-\sigma_0-\sigma_1)}{\sigma_1-2}\times$$

$$\times\left[(t-\omega)^{2-\sigma_1}|\ln(t-\omega)|^{\mu_0}\exp\left(\operatorname{sign}(\sigma_0-\sigma_1-1)\sqrt{\left|\frac{\sigma_0+1}{1-\sigma_0-\sigma_1}\ln(t-\omega)\right|}\right)\right]^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}.$$

Далее заметим, что при $\omega = 0$ уравнение (36) принимает вид

$$z'' = A|\tau|^{\gamma}|z|^{\sigma_0}|\ln|z||^{\mu_0}|z'|^{\sigma_1}\exp\left(\sqrt{|\ln|z'||}\right).$$

Это уравнение следует исследовать при $\tau \uparrow 0$, причем $\pi_0(\tau) = \tau$, $I_1^0(\tau) = -|A|\int_{A_\omega}^{\tau}(-t)^{\sigma_0+\gamma}\,dt$. Поэтому при $\tau \uparrow 0$

$$I_1^0(\tau) \sim \begin{cases} \dfrac{|A|}{\gamma+\sigma_0+1}(-\tau)^{\gamma+\sigma_0+1}, & \text{если} \quad \gamma+\sigma_0 \neq -1, \\ |A|\ln(-\tau), & \text{если} \quad \gamma+\sigma_0 = -1. \end{cases}$$

Тогда из теоремы вытекает следующее утверждение.

Следствие 4. *Для существования $P_{0+}(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений, $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, уравнения (26) необходимо, а если выполняется условие (29), то и достаточно выполнения усло-*

вий (30). Более того, для каждого такого $P_{0+}\left(Y_0, Y_1, \dfrac{\gamma+2-\sigma_1}{\sigma_0+\gamma+1}\right)$*-решения имеют место при* $t \downarrow 0$ *асимптотические представления*

$$y'(t) \sim c_0 \left[t^{\gamma+\sigma_0+1} |\ln t|^{\mu_0} \exp\left(\operatorname{sign}(\sigma_0-\sigma_1-1) \sqrt{\left| \frac{\gamma+\sigma_0+1}{1-\sigma_0-\sigma_1} \ln t \right|} \right) \right]^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}},$$

$$y(t) \sim \frac{c_0(1-\sigma_0-\sigma_1)}{\gamma-\sigma_1+2} \left[t^{2+\gamma-\sigma_1} |\ln t|^{\mu_0} \exp\left(\operatorname{sign}(\sigma_0-\sigma_1-1) \sqrt{\left| \frac{\gamma+\sigma_0+1}{1-\sigma_0-\sigma_1} \ln t \right|} \right) \right]^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}.$$

Выводы. В настоящей работе устанавливаются необходимые условия существования так называемых $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений уравнения (1) для случаев $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$. Для уравнений, в которых функция φ_0 удовлетворяет условию S_0, получены асимптотические представления и доказано существование таких решений. На функцию φ_1 не накладываются никакие дополнительные ограничения, кроме (2), что требует изменения методики исследования по сравнению с предыдущими исследованиями уравнений такого вида.

1. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1990. — 430 с.
2. *Костин А.В.* Об асимптотике продолжаемых решений уравнения типа Эмдена – Фаулера // Докл. АН СССР. — 1971. — **200**, № 1. — С. 28 – 31.
3. *Костин А. В., Евтухов В. М.* Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения // Там же. — 1976. — **231**, № 5. — С. 1059 – 1062.
4. *Евтухов В. М.* Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка // Там же. — 1977. — **233**, № 4. — С. 531 – 534.
5. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Сообщ. АН ГССР. — 1982. — **106**, № 3. — С. 473 – 476.
6. *Wong P. K.* Existence and asymptotic behavior of proper solutions of a class of second-order nonlinear differential equations // Pacif. J. Math. — 1963. — **13**. — P. 737 – 760.
7. *Marić V., Tomić M.* Asymptotic properties of solutions of the equation $y'' = f(x)\Phi(y)$ // Math. Z. — 1976. — **149**. — S. 261 – 266.
8. *Talliaferro S. D.* Asymptotic behavior of the solutions of the equation $y'' = \Phi(t)f(y)$ // SIAM J. Math. Anal. — 1981. — **12**, № 6. — P. 1 – 24.
9. *Кирилова Л. О.* Асимптотичні властивості розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, які близькі до рівнянь типу Емдена – Фаулера // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2004. — Вип. 228. — С. 30 – 35.
10. *Евтухов В. М., Кириллова Л. А.* Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. — 2005. — **41**, № 8. — С. 1053 – 1061.
11. *Кириллова Л. А.* Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Нелінійні коливання. — 2005. — **8**, № 1. — С. 18 – 28.
12. *Евтухов В.М.* Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 2003. — **39**, № 4. — С. 433 – 444.

Получено 18.05.08