УДК 517.9

УСРЕДНЕНИЕ УПРАВЛЯЕМЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНОЙ ХУКУХАРЫ

$\boxed{\text{В. А. Плотников}}$, О. Д. Кичмаренко

Одес. нац. ун-т
Украина, 65026, Одесса, ул. Дворянская, 2
e-mail: v.plotnikov@paco.net
k.olga@paco.net

We give a substantiation of the averaging method for controlled linear differential equations with Hukuhara derivative and delay.

Наведено обґрунтування методу усереднення для керованих лінійних диференціальних рівнянь із загаюванням із похідною Хукухари.

Введение. Изучение свойств пучка траекторий и построение множества достижимости для систем управления играют важную роль при исследовании задач оптимального управления.

Дифференциальные уравнения с производной Хукухары [1] были введены в работах [2, 3], в которых также исследованы основные свойства их решений.

В [4] показано, что решение уравнения с производной Хукухары аппроксимирует сверху множество достижимости, а в [5 – 9] уравнения с производной Хукухары применены для исследования нечетких дифференциальных уравнений. В [10, 11] проведено обоснование метода усреднения для дифференциальных уравнений и дифференциальных включений с производной Хукухары без запаздывания, а в [12 – 14] — с запаздыванием. В данной статье приводится обоснование метода частичного усреднения управляемых уравнений с производной Хукухары с переменным запаздыванием.

Определение 1 [1]. *Пусть множества A, B принадлежат* $\mathrm{conv}(\mathrm{R}^n)$. *Разностью Хукухары $A\overset{H}{-}B$ множеств A и B называется такое множество $C \in \mathrm{conv}(\mathrm{R}^n)$, что $A = B + C$,* $\mathrm{conv}(\mathrm{R}^n)$ *— пространство непустых выпуклых компактных подмножеств в* R^n.

Разность Хукухары, если она существует, определяется единственным образом. Операция разности непрерывна относительно метрики Хаусдорфа.

Определение 2 [1]. *Многозначное отображение $X : \mathrm{R}^1 \to \mathrm{conv}(\mathrm{R}^n)$ дифференцируемо по Хукухаре в точке $t_0 \in \mathrm{R}^1$, если существуют разности $X(t_0+\Delta t)\overset{H}{-}X(t_0)$ и $X(t_0)\overset{H}{-}X(t_0-\Delta t)$ для всех достаточно малых $\Delta t > 0$ и элемент $D_H X(t_0) \in \mathrm{conv}(\mathrm{R}^n)$ такой, что*

$$\lim_{\Delta t\to 0_+} h\left(\frac{X(t_0+\Delta t)\overset{H}{-}X(t_0)}{\Delta t}, D_H X(t_0)\right) = \lim_{\Delta t\to 0_+} h\left(\frac{X(t_0)\overset{H}{-}X(t_0-\Delta t)}{\Delta t}, D_H X(t_0)\right),$$

где $h(A,B)$ — *расстояние по Хаусдорфу между множествами* A *и* B, *причем* $h(A,B) = \min\{d > 0 | A \subset S_d(B), B \subset S_d(A)\}$, A, $B \in \mathrm{comp}(\mathrm{R}^n)$, $S_d(A)$ — *замкнутая* d*-окрестность множества* A. *Модуль* $|A|$ *множества* $A \in \mathrm{conv}(\mathrm{R}^n)$ *равен* $h(A,\{0\})$.

В работе [1] определен интеграл от непрерывного многозначного отображения $X : [a,b] \to \mathrm{conv}(\mathrm{R}^n)$ и показано, что $D_H \int_a^t X(s)ds = X(t)$.

1. Обоснование метода усреднения для управляемых линейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары. ***1.1. Постановка задачи.*** Рассмотрим управляемую линейную систему, описываемую дифференциальным уравнением с производной Хукухары и запаздыванием:

$$D_H X(t) = \varepsilon \left[A(t)X(t) + A_1(t)X(\alpha(t)) + F(t) + B(t)u(t)\right], \tag{1}$$

где $t \in I = \left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$, ε — малый параметр, $X : \mathrm{R}^1 \to \mathrm{conv}(\mathrm{R}^n)$, $A(t)$, $A_1(t)$ — $(n \times n)$-матрицы, $F : \mathrm{R}^1 \to \mathrm{conv}(\mathrm{R}^n)$, $\alpha(t)$ — переменное запаздывание, $B(t)$ — $(n \times r)$-матрица, управление $u(t) \in U, U \in \mathrm{comp}(\mathrm{R}^r)$.

Запаздывание $0 \leq \alpha(t) \leq t$ — неотрицательная непрерывная функция. Для уравнения (1) зададим начальное условие $X(0) = X_0$. Если $\alpha(t) \leq t$ и существует $t_* = \inf\limits_{t \geq 0} \alpha(t) > -\infty$, то на $[t_*, 0]$ зададим начальную функцию $\Phi : \mathrm{R}^1 \to \mathrm{conv}(\mathrm{R}^n)$. Далее будем считать, что $0 \leq \alpha(t) \leq t$.

При усреднении функции $B(t)u(t)$ нельзя утверждать существование среднего для произвольного управления $u(t)$. Поэтому воспользуемся схемой частичного усреднения [15].

Предположим, что существуют

$$\overline{A} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_t^{t+T} A(s)\,ds, \quad \overline{A}_1 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_t^{t+T} A_1(s)\,ds, \quad \overline{F} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_t^{t+T} F(s)\,ds \tag{2}$$

и

$$V = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_t^{t+T} B(s)U\,ds. \tag{3}$$

Тогда уравнению (1) поставим в соответствие частично усредненное уравнение

$$D_H Y(t) = \varepsilon \left[\overline{A}Y(t) + \overline{A}_1 Y(\alpha(t)) + \overline{F} + v\right], \quad Y(0) = X_0, \tag{4}$$

где $Y : \mathrm{R}^1 \to \mathrm{conv}(\mathrm{R}^n)$, новое управление $v(t)$ выбирается из множества V.

Интеграл в (2) от многозначного отображения понимается в смысле Римана – Хукухары [1], а в (3) — в смысле Аумана, сходимость в $\mathrm{conv}(\mathrm{R}^n)$ понимается в смысле метрики Хаусдорфа [16]. Если $\|B(t)\| \leq m(t)$, где $m(t)$ — суммируемая функция, то согласно теореме А. А. Ляпунова [17] $V \in \mathrm{conv}(\mathrm{R}^r)$.

1.2. Алгоритм соответствия управлений исходной и усредненной систем. Соответствие между управлениями $u(t)$ и $v(t)$ установим по следующему алгоритму ступенчатого усреднения:

1. Управлению $v(t) \in V$ поставим в соответствие управление $u(t) \in U$ следующим образом:

а) вычисляем $v_i = \frac{1}{T_0}\int_{iT_0}^{(i+1)T_0} v(t)dt, i = 0, 1, 2, \ldots$ (здесь T_0 — произвольно выбранная константа);

б) зададим управление $u(t) = \{u_i(t),\, iT_0 \le t < (i+1)T_0\}$, где $u_i(t)$ находим из условия

$$\min_{u(t)\in U}\left\|\frac{1}{T_0}\int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0} B(s)u(s)\,ds - v_i\right\| = \left\|\frac{1}{T_0}\int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0} B(s)u_i(s)\,ds - v_i\right\|. \tag{5}$$

Очевидно, что управление $u(t)$ в (5) существует, но может определяться неоднозначно.

2. Управлению $u(t) \in U$ поставим в соответствие управление $v(\varepsilon t) \in V$ следующим образом:

а) вычислим $w_i = \frac{1}{T_0}\int_{iT_0}^{(i+1)T_0} B(s)u(s)ds, i = 0, 1, 2, \ldots, w_i \in V_{T_0}^i = \frac{1}{T_0}\int_{iT_0}^{(i+1)T_0} B(t)U\,dt;$ согласно (3) имеем

$$\lim_{T_0\to\infty} V_{T_0}^i = V, \tag{6}$$

т. е. условие $w_i \in V$ может не выполняться;

б) зададим управление $v(t) = \{v_i,\, iT_0 \le t < (i{+}1)T_0,\, i = 0, 1, \ldots\}$, где v_i находим из условия

$$\min_{v\in V}\|w_i - v\| = \|w_i - v_i\|. \tag{7}$$

В силу выпуклости и компактности множества V, а также выпуклости функции $\|w_i - v\|$ значение v_i в (7) определяется однозначно.

В качестве управления $v(t)$ можно выбрать ступенчатую функцию

$$\tilde v(t) = \left\{ v_i(t) \in V \,\middle|\, \frac{1}{T_0}\int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0} v_i(t)dt = v_i,\; iT_0 \le t < (i{+}1)T_0,\; i = 0, 1, \ldots \right\}.$$

1.3. Обоснование схемы ступенчатого усреднения.

Теорема. *Пусть в области $Q = \{t \ge 0;\, X \in D \subset \mathrm{conv}(\mathrm{R}^n)\}$ выполнены следующие условия:*

1) $A(t)$, $A_1(t)$, $F(t)$ и $B(t)$ непрерывны и ограничены, т. е. $\|A(t)\| \le M$, $\|A_1(t)\| \le M$, $\|B(t)\| \le M$, $|F(t)| \le M$; $|U| \le 1$;

2) функция $\alpha(t)$ равномерно непрерывна при $t \ge 0$ и $0 \le \alpha(t) \le t$;

3) пределы (2), (3) существуют равномерно относительно $t \ge 0$;

4) решения $Y(t)$ усредненной системы (4) при любом измеримом управлении $v(t) \in V$, $\varepsilon \in (0,\sigma]$, $t \geq 0$, $Y(0) = X_0 \subset D' \subset D$ вместе с ρ-окрестностью принадлежат области D.

Тогда для любого $\eta > 0$, $L > 0$ существует $\varepsilon(\eta, L) \in (0,\sigma]$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливы следующие утверждения:

1) для любого допустимого управления $u(t) \in U$ системы (1) существует допустимое управление $v(t) \in V$ системы (4) такое, что справедлива оценка

$$h(X(t), Y(t)) \leq \eta, \tag{8}$$

где $X(t), Y(t)$ — решения уравнений (1) и (4) соответственно, при этом $X(0) = Y(0) = X_0 \in D'$;

2) для любого допустимого управления $v(t) \in V$ системы (4) существует допустимое управление $u(t) \in U$ системы (1) такое, что справедлива оценка (8).

Доказательство. Пусть $u(t)$ — некоторое допустимое управление в (1), а $v(t)$ — соответствующее ему по алгоритму (п.1.2) управление в (4). Представим решения уравнений (1) и (4) в интегральной форме [2, 4]

$$X(t) = X_0 + \varepsilon \int\limits_0^t [A(s)X(s) + A_1(s)X(\alpha(s)) + F(s) + B(s)u(s)]\, ds,$$

$$Y(t) = X_0 + \varepsilon \int\limits_0^t [\overline{A}Y(s) + \overline{A_1}Y(\alpha(s)) + \overline{F} + v]\, ds$$

и оценим $|X(t)|$ и $|Y(t)|$.

Обозначим $m_X(s) = \max\limits_{0 \leq \tau \leq s} |X(\tau)|$, $m_Y(s) = \max\limits_{0 \leq \tau \leq s} |Y(\tau)|$. Тогда

$$m_X(t) \leq |X_0| + \varepsilon \int\limits_0^t \big[\|A(s)\| m_X(s) + \|A_1(s)\| m_X(s) + |F(s)| + \|B(s)\|\, |U|\big]\, ds \leq$$

$$\leq |X_0| + 2ML + 2\varepsilon M \int\limits_0^t m_X(s)\, ds \leq \big(|X_0| + 2ML\big) e^{2\varepsilon M t} \leq \big(|X_0| + 2ML\big) e^{2M L}.$$

Аналогично получаем

$$m_Y(s) \leq \big(|X_0| + 2ML\big) e^{2M L}.$$

Таким образом,

$$|X(t)| \leq \big(|X_0| + 2ML\big) e^{2M L} \quad \text{и} \quad |Y(t)| \leq \big(|X_0| + 2ML\big) e^{2M L}.$$

С учетом изложенного выше оценим

$$h(X(t),Y(t)) \le \varepsilon h\left(\int\limits_0^t [A(s)X(s)+A_1(s)X(\alpha(s))+F(s)+B(s)u(s)]\,ds,\right.$$

$$\left.\int\limits_0^t \left[\overline{A}Y(s)+\overline{A}_1Y(\alpha(s))+\overline{F}+v(s)\right]\,ds\right) \le$$

$$\le \varepsilon\left[h\left(\int\limits_0^t A(s)X(s)\,ds,\int\limits_0^t \overline{A}Y(s)\,ds\right)+\right.$$

$$+\,h\left(\int\limits_0^t A_1(s)X(\alpha(s))\,ds,\int\limits_0^t \overline{A}_1Y(\alpha(s))\,ds\right)+$$

$$\left.+\,h\left(\int\limits_0^t F(s)\,ds,\int\limits_0^t \overline{F}\,ds\right)+\left\|\int\limits_0^t B(s)u(s)\,ds-\int\limits_0^t v(s)\,ds\right\|\right]. \qquad (9)$$

Каждое слагаемое в (9) оценим отдельно с учетом (2), (3).

Сегмент $[0, L\varepsilon^{-1}]$ разобьем на части точками $t_i = i\Delta(\varepsilon)$, $i = 0,1,\ldots,m$, причем $m\Delta(\varepsilon) \le \le L\varepsilon < (m+1)\Delta(\varepsilon)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\Delta(\varepsilon)=\infty$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\Delta(\varepsilon)=0$.

Пусть $t\in[t_k,t_{k+1})$, тогда

$$h\left(\int\limits_0^t A(s)X(s)\,ds,\int\limits_0^t \overline{A}Y(s)\,ds\right) \le$$

$$\le h\left(\sum_{i=1}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X(s)\,ds+\int\limits_{t_k}^{t} A(s)X(s)ds,\sum_{i=1}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X(s)\,ds+\int\limits_{t_k}^{t} \overline{A}X(s)\,ds\right)+$$

$$+\,h\left(\int\limits_0^t \overline{A}X(s)ds,\int\limits_0^t \overline{A}Y(s)\,ds\right) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{k-1} h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X(s)\,ds,\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X(s)\,ds\right)+h\left(\int\limits_{t_k}^{t} A(s)X(s)\,ds,\int\limits_{t_k}^{t} \overline{A}X(s)\,ds\right)+$$

$$+\,h\left(\int\limits_0^t \overline{A}X(s)\,ds,\int\limits_0^t \overline{A}Y(s)\,ds\right), \qquad (10)$$

$$h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X(s)\,ds,\ \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X(s)\,ds\right) \le$$

$$\le h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X(s)\,ds,\ \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X_i\,ds\right) + h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X_i\,ds,\ \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X_i\,ds\right) +$$

$$+ h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X_i\,ds,\ \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X(s)\,ds\right).$$

В силу равномерной сходимости к среднему в (2), (3) существует монотонно убывающая функция $\Theta(t) \to 0$ при $t \to \infty$ такая, что

$$h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X_i\,ds,\ \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X_i\,ds\right) \le \Delta(\varepsilon)\Theta\left(\Delta(\varepsilon)\right),$$

$$h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} B(s)u(s)\,ds,\ \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} v(s)\,ds\right) \le \Delta(\varepsilon)\Theta\left(\Delta(\varepsilon)\right).$$

Тогда

$$h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X(s)\,ds,\ \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X(s)\,ds\right) \le h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X_i\,ds+\right.$$

$$+\,\varepsilon \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s) \int\limits_{t_i}^{s} \left[A(\tau)X(\tau) + A_1(\tau)X(\alpha(\tau)) + F(\tau) + B(\tau)u(\tau)\right] d\tau\,ds,$$

$$\left.\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)X_i\,ds\right) + h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X_i\,ds,\ \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A}X_i\,ds+\right.$$

$$\left.+\,\varepsilon \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{A} \int\limits_{t_i}^{s} \left[A(\tau)X(\tau) + A_1(\tau)X(\alpha(\tau)) + F(\tau) + v(\tau)\right]\,d\tau\,ds\right) + \Delta(\varepsilon)\Theta(\Delta(\varepsilon)) \le$$

$$\le \varepsilon \left|\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s) \int\limits_{t_i}^{s} \left[A(\tau)X(\tau) + A_1(\tau)X(\alpha(\tau)) + F(\tau) + B(\tau)u(\tau)\right]\,d\tau\,ds\right| +$$

$$+\,\varepsilon\left|\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\overline{A}\int\limits_{t_i}^{s}\left[A(\tau)X(\tau)+A_1(\tau)X(\alpha(\tau))+F(\tau)+B(\tau)u(\tau)\right]\,d\tau\,ds\right|+\Delta(\varepsilon)\Theta(\Delta(\varepsilon))\,\le$$

$$\le\varepsilon(\Delta(\varepsilon))^2 4M^2\left(1+(\|X_0\|+2ML)e^{2ML}\right)+\Delta(\varepsilon)\Theta\left(\Delta(\varepsilon)\right), \tag{11}$$

$$h\left(\int\limits_{t_k}^{t}A(s)X(s)\,ds,\int\limits_{t_k}^{t}\overline{A}X(s)\,ds\right)\le\int\limits_{t_k}^{t}h\left(A(s)X(s),\overline{A}X(s)\right)\,ds\le$$

$$\le\int\limits_{t_k}^{t}\max_{\psi\in S_1}\left|C(A(s)X(s),\psi)-C(\overline{A}X(s),\psi)\right|\,ds\le$$

$$\le\int\limits_{t_k}^{t}|X(s)|\max_{\psi\in S_1}\left|A^T(s)\psi-\overline{A}^T\psi\right|\,ds\le\int\limits_{t_k}^{t}|X(s)|\left\|A^T(s)-\overline{A}^T\right\|ds\le$$

$$\le 2M\Delta(\varepsilon)\left(|X_0|+2ML\right)e^{2M\,L}, \tag{12}$$

где $C(A,\psi)=\max\limits_{a\in A}(a,\psi)$ — опорная функция множества $A\in\mathrm{comp}(\mathrm{R}^n)$, $\psi\in\mathrm{R}^n$, S_1 — сфера единичного радиуса.

Далее,

$$h\left(\int\limits_{0}^{t}\overline{A}X(s)\,ds,\int\limits_{0}^{t}\overline{A}Y(s)\,ds\right)\le\int\limits_{0}^{t}h\left(\overline{A}X(s),\overline{A}Y(s)\right)\,ds=$$

$$=\int\limits_{0}^{t}\max_{\psi\in S_1}\left|C(\overline{A}X(s),\psi)-C(\overline{A}Y(s),\psi)\right|\,ds=$$

$$=\int\limits_{0}^{t}\max_{\psi\in S_1}\left|C(X(s),\overline{A}^T\psi)-C(Y(s),\overline{A}^T\psi)\right|\,ds\le$$

$$\le\int\limits_{0}^{t}\max_{\psi\in S_1}\left\|\overline{A}^T\psi\right\|h(X(s),Y(s))\,ds\le$$

$$\le\left\|\overline{A}^T\right\|\int\limits_{0}^{t}h(X(s),Y(s))\,ds\le M\int\limits_{0}^{t}\delta(s)\,ds, \tag{13}$$

где $\delta(t)=\max\limits_{0\le x\le t}h(X(s),Y(s))$.

Таким образом, из (10) – (13) следует

$$h\left(\int_0^t A(s)X(s)\,ds, \int_0^t \overline{A}Y(s)\,ds\right) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k-1}\left[\varepsilon(\Delta(\varepsilon))^2 4M^2\left(1+(\|X_0\|+2ML)e^{2ML}\right)+\Delta(\varepsilon)\Theta(\Delta(\varepsilon))\right]+$$

$$+2M\Delta(\varepsilon)(|X_0|+2ML)e^{2ML}+M\int_0^t \delta(s)ds \leq$$

$$\leq 2M\Delta(\varepsilon)\left(2ML+(2ML+1)(|X_0|+2ML)e^{2ML}\right)+$$

$$+\frac{L}{\varepsilon}\,\Theta(\Delta(\varepsilon))+M\int_0^t \delta(s)\,ds. \tag{14}$$

Аналогично получаем

$$h\left(\int_0^t A_1(s)X(\alpha(s))\,ds, \int_0^t \overline{A}_1Y(\alpha(s))\,ds\right) \leq$$

$$\leq 2M\Delta(\varepsilon)(2ML+(2ML+1)(|X_0|+2ML)e^{2ML})+$$

$$+\frac{L}{\varepsilon}\,\Theta(\Delta(\varepsilon))+M\int_0^t \delta(s)ds. \tag{15}$$

Оценим третье слагаемое в (9):

$$h\left(\int_0^t F(s)\,ds, \int_0^t \overline{F}\,ds\right) \leq$$

$$\leq h\left(\sum_{i=1}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} F(s)\,ds+\int_{t_k}^{t} F(s)\,ds, \sum_{i=1}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{F}\,ds+\int_{t_k}^{t} \overline{F}\,ds\right) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k-1} h\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} F(s)\,ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{F}\,ds\right)+h\left(\int_{t_k}^{t} F(s)\,ds, \int_{t_k}^{t} \overline{F}\,ds\right).$$

В силу равномерной сходимости к среднему в (2) существует монотонно убывающая функция $\Theta(t) \to 0$ при $t \to \infty$ такая, что

$$h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(s)\,ds, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{F}\,ds\right) \le \Delta(\varepsilon)\Theta(\Delta(\varepsilon)).$$

Тогда

$$h\left(\int\limits_0^t F(s)\,ds, \int\limits_0^t \overline{F}\,ds\right) \le \sum_{i=1}^{k-1}\Delta(\varepsilon)\Theta(\Delta(\varepsilon)) + h\left(\int\limits_{t_k}^t F(s)\,ds, \int\limits_{t_k}^t \overline{F}\,ds\right) \le$$

$$\le \frac{L}{\varepsilon}\Theta(\Delta(\varepsilon)) + \int\limits_{t_k}^t h\left(F(s), \overline{F}\right)\,ds \le \frac{L}{\varepsilon}\Theta(\Delta(\varepsilon)) + 2M\Delta(\varepsilon). \tag{16}$$

Оценим четвертое слагаемое в (9) с учетом алгоритма соответствия управлений, выбрав $T_0 = \Delta(\varepsilon)$:

$$\left\|\int\limits_0^t B(s)u(s)\,ds - \int\limits_0^t v(s)\,ds\right\| \le$$

$$\le \left\|\left(\sum_{i=1}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i=1}} B(s)u(s)\,ds + \int\limits_{t_k}^t B(s)u(s)\,ds\right) - \left(\sum_{i=1}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} v(s)\,ds + \int\limits_{t_k}^t v(s)\,ds\right)\right\| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{k-1}\left\|\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} B(s)u(s)ds - \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} v(s)\,ds\right\| + \left\|\int\limits_{t_k}^t B(s)u(s)\,ds - \int\limits_{t_k}^t v(s)\,ds\right\| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{k-1}\Delta(\varepsilon)\Theta(\Delta(\varepsilon)) + 2M\Delta(\varepsilon) \le \frac{L}{\varepsilon}\Theta(\Delta(\varepsilon)) + 2M\Delta(\varepsilon). \tag{17}$$

Из (9), (14) – (17) получаем

$$\delta(t) \le r(\varepsilon) + 2\varepsilon M\int\limits_0^t \delta(s)\,ds,$$

где

$$r(\varepsilon) = 4M\varepsilon\Delta(\varepsilon)\left(2ML + (2ML+1)(|X_0| + 2ML)e^{2ML}\right) + 4M\varepsilon\Delta(\varepsilon) + 4L\Theta(\Delta(\varepsilon)).$$

Согласно лемме Гронуолла – Беллмана

$$\delta(s) \le r(\varepsilon)e^{2ML}. \tag{18}$$

Поскольку $r(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, из (18) следует оценка (8).

2. Вывод. Доказанная теорема позволяет построить численно-асимптотические методы решения задач оптимального управления системами с производной Хукухары аналогично задачам оптимального управления на траекториях, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями [15].

1. *Hukuhara M.* Integration des applications mesurable dont la valeur est un compact convexe // Func. ekvacioj. — 1967. — № 10. — P. 205 – 223.
2. *De Blasi F. S., Iervolino F.* Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso // Boll. Unione mat. ital. — 1969. — **2**, № 4-5. — P. 491 – 501.
3. *De Blasi F. S., Iervolino F.* Euler method for differential equations with set-valued solutions // Ibid. — 1971. — **4**, № 4. — P. 941 – 949.
4. *Толстоногов А. А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. — Новосибирск: Наука, 1986. — 296 с.
5. *Diniz G., Fernandes J. F. R., Meyer J. F. C. A., Barros L. C.* A fuzzy Cauchy problem modelling the decay of the biochemical oxygen demand in water // Joint 9th IFSA World Congr. and 20th NAFIPS Int. Conf. — 2001. — P. 512 – 516.
6. *Hüllermeier E.* An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical systems // Int. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems. — 1997. — № 5. — P. 117 – 137.
7. *Lakshmikantham V., Leela S., Vatsala A. S.* Interconnection between set and fuzzy differential equations // Nonlinear Analysis. — 2003. — № 54. — P. 351 – 360.
8. *Lakshmikantham V., Tolstonogov A. A.* Existence and interrelation between set and fuzzy differential equations // Ibid. — № 55. — P. 255 – 268.
9. *Oberguggenberger M., Pittschmann S.* Differential equations with fuzzy parameters // Math. and Comput. Modelling Dynam. Syst. — 1999. — № 5. — P. 181 – 202.
10. *Плотников А. В.* Усреднение дифференциальных включений с производной Хукухары // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, № 1. — С. 121 – 125.
11. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. — Одесса: Астропринт, 1999. — 356 с.
12. *Kisielewicz M.* Method of averaging for differential equations with compact convex valued solutions // Rend. math. — 1976. — **9**, № 3. — P. 397 – 408.
13. *Janiak T., Luczak-Kumorek E.* Bogollubov's type theorem for functional differential inclusions with Hukuhara's derivative // Stud. Univ. Babes-Bolyai. Math. — 1991. — № 1. — P. 41 – 54.
14. *Plotnikov V. A., Rashkov P. I.* Averaging in differential equations with Hukuhara derivative and delay // Funct. Different. Equat. (Israel). — 2001. — **8**, № 3-4. — P. 371 – 381.
15. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. — Киев; Одесса: Лыбидь, 1992. — 188 с.
16. *Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы: Сб. обзорных статей. (Тр. Мат. ин-та АН СССР). — М.: Наука, 1985. — **2**. — С. 194 – 252.
17. *Ляпунов А. А.* О вполне аддитивных вектор-функциях // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1940. — № 6. — С. 465 – 478.

Получено 27.02.2006