

УДК 517.9

**ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ ЛЬЕНАРА
З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ****В. Г. Самойленко, В. В. Собчук***Нац. ун-т ім. Т. Шевченка,**Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64**e-mail: vsam@imath.kiev.ua;**svhr@mechmat.kiev.ua*

Periodic solutions and behaviour of the phase trajectories of Liénard equation with impulsive effect at unfixed moments of time are studied.

Вивчаються періодичні розв'язки та поведінка фазових траєкторій рівняння Льєнара з імпульсною дією у нефіксовані моменти часу.

У зв'язку з розвитком сучасного природознавства та техніки виникає необхідність дослідження впливу імпульсних збурень в нелінійних динамічних системах. Подібні задачі виникають, зокрема, в електротехніці, механіці, хімії, біології, економіці, в інших галузях науки та техніки, де доводиться вивчати системи, що перебувають під впливом зовнішніх сил, тривалістю яких можна знехтувати при складанні відповідних математичних моделей [1]. Широкий клас подібних динамічних систем описується за допомогою певних диференціальних рівнянь та умов імпульсної дії. За наявності імпульсної дії поведінка розв'язків диференціальних рівнянь (навіть лінійних) може бути суттєво нелінійною [2] і значно відрізнятися від поведінки таких систем за відсутності імпульсної дії. Саме тому вивчення таких систем є надзвичайно актуальним і вимагає особливої уваги.

До таких диференціальних рівнянь ми переходимо від лінійного диференціального рівняння вигляду

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + x = e(t), \quad (1)$$

загальний розв'язок якого добре вивчено. Це рівняння можна розглядати як перше наближення до рівняння Льєнара

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = e(t). \quad (2)$$

Рівняння Льєнара описує різноманітні динамічні системи, що мають суттєво нелінійний характер, а саме такі, яким властиве явище нелінійного тертя і які не можуть бути описані рівнянням вигляду (1).

Якщо говорити про механічні застосування рівняння Льєнара, то при наявності відповідної комбінації від'ємного та додатного затухання система (2) набуває здатності мати коливання за відсутності консервативних сил та періодичного збурення. В такому випадку система (2) визначає частоту своїх коливань автономно, оскільки енергетичний обмін

з даним запасом енергії регулюється лише амплітудою x та швидкістю $\dot{x}$. У цьому важливому випадку самозбурення системи (2) функції $f(x)$ та $g(x)$ мають такий зміст: функція $g(x)$ описує повертаючу до положення рівноваги силу, без якої взагалі неможливі коливання, а функція $f(x)$ — власне змінний декремент затухання, причому для малих значень модуля x він від'ємний, а для великих значень модуля x — додатний.

Розглянемо динамічну систему, рух у якій описується диференціальним рівнянням вигляду

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (3)$$

($x \in M \subset \mathbb{R}^3$, M — фазовий простір системи (3), $t \in \mathbb{R}$ — час) і яка зазнає впливу миттєвих сил, котрі визначаються деяким оператором $\mathcal{A}_t$, що у моменти проходження рухомою точкою деякого фіксованого положення $x = x_*$ діє згідно з правилом $(t, x) \rightarrow (t, \mathcal{A}_t x)$. Імпульсна дія в такій системі відбувається у нефіксовані моменти часу та збільшує кількість руху в системі на деяку величину $I(\dot{x})$, що залежить від швидкості рухомої точки в момент проходження нею положення $x = x_*$. Далі вважатимемо, що $I(y)$, де $y = \dot{x}$, як функція свого аргументу, є неперервною.

Якщо t_* — деякий момент часу, в який рухома точка досягає положення $x = x_*$, коли відбувається імпульсна дія, то математично це явище можна записати за допомогою формули вигляду [1]

$$\Delta \left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=x_*} = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_*+0} - \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_*-0} = \mathcal{A}_t x - x = I(\dot{x}). \quad (4)$$

Дослідимо питання про існування періодичних розв'язків задачі (3), (4).

Спочатку розглянемо поведінку фазових траєкторій рівняння (3), яке можна записати в еквівалентному вигляді

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -g(x) - f(x)y, \quad (5)$$

або

$$\dot{x} = -F(x) + u, \quad \dot{u} = -g(x), \quad (6)$$

де

$$F(x) = \int_0^x f(s) ds, \quad (7)$$

Позначимо $G(x) = \int_0^x g(s) ds$. Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні при всіх значеннях x та забезпечують для всіх заданих початкових умов існування єдиного розв'язку, який неперервно залежить від початкових умов. Крім того, припустимо, що виконується умова

$$xg(x) > 0 \text{ для } x \neq 0. \quad (8)$$

В механічних застосуваннях це означає, що сила, яка повертає матеріальну точку в положення рівноваги $x = 0$, направлена до положення рівноваги. В такому випадку фазовий портрет системи (5) на площині Oxy , чи системи (6) на площині Oxu має єдину особливу точку — початок координат $O(0, 0)$. Нехай $x(0, a)$, $y(0, a)$, $0 \leq a \leq a_0$ (a — параметр), —

початкові умови для розв'язків системи (5). Такі розв'язки існують, є періодичними [3] і утворюють однопараметричну сім'ю розв'язків вигляду

$$x = x(t, a), \quad y = y(t, a). \quad (9)$$

Сім'ї (9) на площині Oxy , а в силу співвідношення $u = F(x) + y$ також і на площині Oxi відповідає сім'я замкнених кривих, кожна з яких містить в собі початок координат. В механіці такі рухи називають *вільними коливаннями системи*. Вони задаються континуумом циклів, в той час як коливання, що зображуються ізольованими циклами, називаються *вільними коливаннями*.

Для знаходження досить загальних умов існування періодичних розв'язків рівняння (3) припустимо, що $f(x) \neq 0$ в деякому околі точки $x = 0$, та, крім того, будемо вимагати, щоб функції $f(x)$ та $g(x)$ були непарними, тобто

$$f(-x) = -f(x), \quad g(-x) = -g(x). \quad (10)$$

Завдяки цьому фазова картина на площині Oxy та відповідно на площині Oxi симетрична відносно вертикальної осі. Зазначимо, що властивість симетрії потрібна лише в околі нульової точки, тобто саме там, де потрібне існування сім'ї циклів.

Диференціальне рівняння (3), що задовольняє умови (8) та (10), за Опялем [4], називається *диференціальним рівнянням типу S*.

Завдяки симетрії при вивченні фазової діаграми можна обмежитися розглядом лише правого півплощини. Вище та нижче вертикальної осі $y = 0$ система (5) виключенням t зводиться до диференціального рівняння першого порядку вигляду

$$\frac{dy}{dx} = -f(x) - \frac{g(x)}{y}. \quad (11)$$

Це означає, що рівняння дуг інтегральних кривих поза віссю абсцис можна записати у вигляді $y = y(x)$, причому в кінцевих точках цих дуг дотична вертикальна. Дуги, які виходять з точки $(\xi, 0)$ вгору та вниз, позначимо відповідно L_{ξ}^{+} ($y > 0$) та L_{ξ}^{-} ($y < 0$), а їх об'єднання (суму) — через L_{ξ} . Рух, що описується системою (5), пробігає спочатку дугу L_{ξ}^{+} до точки $(\xi, 0)$, а потім дугу L_{ξ}^{-} . При цьому фазова траєкторія рухомої точки розташована в області, обмеженій перпендикулярами $x = 0$ та $x = \xi$, оскільки похідна розв'язку dy/dx обмежена всюди, крім деякої горизонтальної смуги, що знаходиться між прямими $y = \pm \eta$, де η — як завгодно мале число.

У вказаній області фазова траєкторія рухомої точки напрямлена зліва направо, якщо $y > 0$, та справа наліво, якщо $y < 0$, причому на додатній півосі x дана фазова траєкторія напрямлена зверху вниз, перетинає її в точці $(\xi, 0)$ та, можливо, входить в початок координат. Отже, дуги L_{ξ}^{+} та L_{ξ}^{-} при їх продовженні неодмінно перетинають вісь ординат.

В подальшому доцільно розрізняти окремі випадки. При цьому через Ω_i , $i = 1, 2, 3, 4$, позначатимемо області, на які розпадається фазова площина.

Випадок А. Для кожного значення $\xi > 0$ дуги L_{ξ}^{+} та L_{ξ}^{-} перетинають вертикальну вісь Oy не в початку координат (рис. 1, а). В силу припущення про симетрію криві L_{ξ} в цьому випадку замкнені. При цьому якщо $0 \leq \xi < \infty$, то криві L_{ξ} покривають деяку смугу Ω_1 , яка містить вісь Ox . Позначимо через Ω_2 та Ω_3 області, що лежать відповідно вище і нижче цієї смуги. Області Ω_2 та Ω_3 заповнені інтегральними кривими $y(x)$, визначеними для всіх x . При певних умовах області Ω_2 та Ω_3 взагалі не існують, оскільки кожна фазова крива є циклом.

Якщо вибрати $(x_0, y_0) \in \Omega_1$, то розв'язок $(x(t), y(t))$, $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ (t_0 — довільне) рівняння (3) буде періодичним. Це завжди має місце, якщо модулі обох початкових умов x_0 та y_0 досить малі.

Випадок Б. Для кожного значення ξ криві L_ξ^+ та L_ξ^- перетинають вісь ординат в початку координат O (рис. 1, б). Фазова площина при цьому також розпадається на три області: $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, але в даному випадку ні одна з них не є порожньою. Середня область містить криві L_ξ та їх дзеркальні відображення. Легко бачити, що в даному випадку немає замкнених траєкторій.

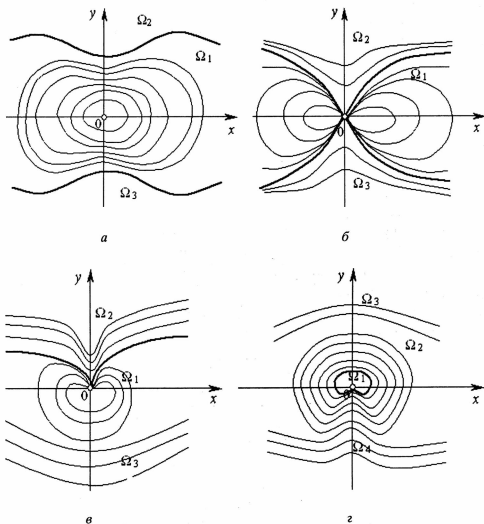


Рис. 1

Випадок В. Для будь-якого значення $\xi > 0$ одна з кривих L_ξ^+ , L_ξ^- перетинає вісь в нульовій точці O (рис. 1, в). В цілому ситуація аналогічна випадку Б, але одна з областей Ω_2 , чи Ω_3 може виявитися порожньою. Замкнені фазові траєкторії відсутні.

Випадок Г. Для всіх досить малих ξ , $0 < \xi < \xi_0$, одна з кривих L_ξ^+ , L_ξ^- межує з початком координат O , але при $\xi > \xi_0$ ні L_ξ^+ , ні L_ξ^- не проходить через початок координат

(рис. 1, 2). Площина ділиться на чотири області: $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$, останні дві з яких можуть бути порожніми. Фазові траєкторії в області Ω_2 — замкнені траєкторії.

У випадках B , V та Γ спільним є те, що в них не існує періодичних розв'язків рівняння (3) при як завгодно малих значеннях початкових умов x_0, y_0 . Лише у випадку A існує сім'я періодичних розв'язків, причому жодна з інтегральних кривих рівняння (11) не проходить через початок координат.

Зазначимо, що при наявності імпульсної дії (4) поведінка фазових траєкторій задачі (3), (4) може бути набагато складнішою. Наприклад, замкнені траєкторії, а відтак і періодичні розв'язки, існують лише у випадках A та Γ . Завдяки дії імпульсних сил (4) періодичні розв'язки в системі (3), (4) можуть з'явитися ще й у випадках B та V . Зазначимо також, що завдяки імпульсній дії розглядувана задача взагалі може не мати періодичних розв'язків, або ж в системі (3), (4) можуть виникнути хаотичні рухи [5].

Встановимо більш конструктивні умови існування періодичних розв'язків рівняння Льєнара типу S з імпульсною дією (3), (4).

Теорема 1. Якщо $F(x) = \int_0^x f(s)ds$ і

$$\int_0^x \frac{g(s)}{|F(s)|} > \frac{1}{4}|F(x)| \quad (12)$$

для всіх x таких, що $0 \leq x < \xi = x_*$, то всі розв'язки рівняння Льєнара (3) типу S з імпульсною дією (4) при достатньо малих початкових умовах є періодичними та не зазнають впливу імпульсних сил жодного разу за період.

Доведення. Дійсно, припустимо, що рівняння (11) має розв'язок, що входить в початок координат, і покажемо, що це приводить до суперечності. Як відомо, такий розв'язок в деякому відкритому інтервалі $(0, \xi_1)$ має певний знак, нехай $\xi_1 < \xi$. Тоді для $0 < \delta < x < \xi_1$ справедлива рівність

$$y(x) - y(\delta) = -[F(x) - F(\delta)] - \int_{\delta}^x \frac{g(s)}{y(s)} ds,$$

звідки при $\delta \rightarrow 0$, враховуючи, що $\lim_{\delta \rightarrow 0} y(\delta) = 0$, маємо

$$y(x) = -F(x) - \int_0^x \frac{g(s)}{y(s)} ds. \quad (13)$$

Якщо $y(x) > 0$ в проміжку $(0, \xi_1)$, то й інтеграл у правій частині (13) є додатним. Звідси випливає нерівність $y(x) < -F(x)$, тобто $F(x) < 0$ для всіх $0 < x < \xi_1$. Тому замість рівності (13) можна записати співвідношення

$$|y(x)| = |F(x)| - \int_0^x \frac{g(s)}{|y(s)|} ds. \quad (14)$$

До такого ж співвідношення прийдемо також при $y(x) < 0$, де $F(x) > 0$.

В обох випадках маємо нерівність $|y(x)| \leq |F(x)|$, звідки випливає умова

$$\frac{1}{|y(x)|} \geq \frac{1}{|F(x)|}. \quad (15)$$

Звідси отримуємо, що з інтегровності функції $g(x)/|y(x)|$ на проміжку $[0, \xi_1]$ випливає інтегровність на тому ж проміжку і функції $g(x)/|F(x)|$.

Покажемо, що якщо виконана нерівність (12), то функція $\frac{g(x)}{|F(x)|}$ не інтегровна в жодному проміжку $[0, \xi]$, де $x > 0$. Тим самим буде доведено існування періодичних траєкторій рівняння (11).

Дійсно, припустимо, що функція $g(x)/|F(x)|$ інтегровна на деякому проміжку $0 \leq x \leq \xi_2 \leq \xi_1$. Тоді з нерівності (12) для $0 \leq x \leq \xi_2$ випливає співвідношення

$$\int_0^x \frac{g(s)}{|F(s)|} ds = \alpha |F(x)|,$$

де $\alpha > 0$. Звідси на підставі формул (14) та (15) отримуємо

$$|y(x)| \leq |F(x)| - \int_0^x \frac{g(s)}{|F(s)|} ds \leq (1 - \alpha) |F(x)| = \alpha_1 |F(x)|.$$

Замінюючи в рівності (14) під знаком інтеграла функцію $|y(x)|$ на $\alpha_1 |F(x)|$, маємо

$$|y(x)| \leq |F(x)| - \frac{1}{\alpha_1} \int_0^x \frac{g(s)}{|F(s)|} ds \leq \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_1}\right) |F(x)| = \alpha_2 |F(x)|.$$

Рекурентне продовження цього процесу для $0 \leq x < \xi_2$ приводить до нерівностей вигляду

$$|y(x)| \leq |F(x)|, \quad \alpha_n = 1 - \frac{\alpha}{\alpha_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad \alpha_0 = 1. \quad (16)$$

При $\alpha > 1/4$ не всі члени нескінченної послідовності $\{\alpha_n\}$ додатні. В противному разі ця послідовність була б монотонно спадною і прагнула б до деякої границі $\beta \geq 0$, де β є розв'язком квадратного рівняння $\beta^2 - \beta + \alpha = 0$. Однак корені цього квадратного рівняння в розглядуваному випадку — комплексні числа. Тому врешті-решт якийсь з чисел α_n виявиться від'ємним, і нерівність (16) приведе до суперечності.

Таким чином, припущення про те, що інтегральна крива $y(x)$ рівняння (11) входить в початок координат, несумісне з умовою (12). Крім того, для будь-яких досить малих початкових умов фазова точка розглядуваної системи, в силу умови $0 \leq x < \xi = x_*$, ніколи не називатиме впливу імпульсних сил згідно з законом (4). Теорему доведено.

Розглянемо поведінку фазових траєкторій рівняння Лъенара типу S на проміжку $[x_*, \xi]$, де $0 < x_* < \xi$. Позначимо $y_* = \sqrt{2G(\xi)}$ та нехай

$$\Omega_* = \{(x, y) : x \in [x_*, \xi]; 2G(x) + y^2 < y_*^2\}.$$

Припустимо крім цього, що:

1) диференціальне рівняння Лъенара типу S задовольняє умови існування та єдиності розв'язку;

2) гіперповерхня $x = x_*$ трансверсальна потоку (11);

3) оператор $\mathcal{A}_t$ є неперервним відносно своїх змінних $(x, \dot{x})$.

Нехай для початкових умов $(x_0, \dot{x}_0)$ задачі (11), (4) має місце властивість **М**: $x_0 < x_*$ та $\dot{x}_0 > 0$, або ж $x_0 > x_*$ та $\dot{x}_0 < 0$, або ж $(x_0, \dot{x}_0) \in \Omega_*$ і $|x_0| \geq |x_*|$ та виконується нерівність (12) для всіх $0 \leq x < \xi = x_*$. Тоді під дією системи (4), (11) фазова точка $(x_0, \dot{x}_0)$ буде рухатись вздовж траєкторії $x(t, x_0, \dot{x}_0, t_0)$. Очевидно, що при цьому знайдеться момент часу t_* такий, що $x(t_*, x_0, \dot{x}_0, t_0) = x_*$, коли фазова точка системи (4), (11) зазнає дії імпульсних сил згідно з законом (11). Нехай

$$t_1 = \min_{t_* > t_0} \{t_* : x(t_*, x_0, \dot{x}_0, t_0) = x_*\}.$$

Розглянемо координати фазової точки $(x(t), \dot{x}(t))$, де $x(t) = x(t, x_0, \dot{x}_0, t_0)$, для $t = t_1 + 0$, тобто їх значення відразу після дії імпульсних сил. Очевидно, що

$$\begin{aligned} x(t_1 + 0) &= x_*, \\ \dot{x}(t_1 + 0) &= \dot{x}(t_1, x_0, \dot{x}_0, t_0) + I(\dot{x}(t_1, x_0, \dot{x}_0, t_0)). \end{aligned} \quad (17)$$

Тоді якщо для $(x_1, \dot{x}_1)$, де $x_1 = x_*$, а $\dot{x}_1 = \dot{x}(t_1 + 0)$ визначено формулою (17), як для нових початкових умов задачі (4), (11), має місце властивість **М**, тобто $(x_*, \dot{x}_1) \in \Omega_*$, то знайдеться момент часу t_* такий, що $x(t_*, x_*, \dot{x}_0, t_0) = x_*$, коли фазова точка системи (4), (11) знову зазнає дії імпульсних сил згідно з законом (11). Позначимо

$$t_2 = \min_{t_* > t_1} \{t_* : x(t_*, x_*, \dot{x}_1, t_1) = x_*\}.$$

Якщо властивість **М** не виконується, тобто $(x_*, \dot{x}_1) \notin \Omega_*$, то фазова точка системи (4), (11) в подальшому (при $t > t_1$) не зазнаватиме впливу миттєвих сил.

Нехай побудовано n перших членів послідовності $\{t_k, (x_k, \dot{x}_k)\}$, $k = \overline{1, n}$, де

$$t_k = \min_{t_* > t_{k-1}} \{t_* : x(t_*, x_{k-1}, \dot{x}_{k-1}, t_{k-1}) = x_*\}, \quad (18)$$

$$x_k = x(t_k, x_{k-1}, \dot{x}_{k-1}, t_{k-1}) = x_*, \quad k = \overline{1, n}, \quad (19)$$

$$\dot{x}_k = \dot{x}(t_k, x_{k-1}, \dot{x}_{k-1}, t_{k-1}) + I(\dot{x}(t_k, x_{k-1}, \dot{x}_{k-1}, t_{k-1})). \quad (20)$$

Очевидно, що при цьому величини $(x_k, \dot{x}_k) = (x_*, \dot{x}_k) \in \Omega_*$, де $k = \overline{1, n-1}$. При виконанні умови $(x_n, \dot{x}_n) = (x_*, \dot{x}_n) \in \Omega_*$ можна побудувати $(n+1)$ -й член згаданої вище послідовності. В протилежному разі ця послідовність „обірветься” на $(n+1)$ -му кроці.

Зрозуміло, що в загальному випадку для довільних значень початкових умов $(x_0, \dot{x}_0)$ послідовність моментів часу $t_1, t_2, \dots$ може бути нескінченною, може містити лише скінченну кількість елементів і може, зокрема, складатись лише з одного елемента або ж навіть не мати жодного.

Якщо послідовність моментів часу складається з однієї точки, що можливо, наприклад, для випадку, коли для всіх $y \in (-y_*, y_*)$ виконується нерівність $|y + I(y)| \geq y_*$, де $y_* = \sqrt{2G(\xi)}$, то система (4), (11) не має періодичних траєкторій.

Аналогічно, якщо ця послідовність має лише скінченну (не порожню!) множину точок, що містять, наприклад, рівно $k \geq 1$ елементів, то тоді виконується нерівність $|\dot{x}_k + I(\dot{x}_k)| \geq y_*$ і система (4), (11) також не має періодичних траєкторій.

Очевидно, що якщо для деякого натурального числа k і для всіх значень $y \in (-y_*, y_*)$ виконується нерівність $|f^k(y)| \geq y_*$, де $f^k(y)$ — k -та ітерація функції $f(y) = -y - I(-y)$, $y = \dot{x}$, то згадана вище послідовність може мати не більше k елементів, а система (4), (11) не матиме періодичних розв'язків.

Таким чином, задача (4), (11) може мати періодичні траєкторії лише тоді, коли послідовність $\{t_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, моментів часу містить нескінченну кількість точок або ж зовсім не має жодного елемента. В останньому випадку при русі фазової точки вздовж траєкторії розв'язку $x(t) = x(t, x_0, \dot{x}_0, t_0)$, що є періодичним з деяким періодом T і який визначено для всіх значень $t \in \mathbb{R}$, фазова точка системи (4), (11) не піддається дії імпульсних сил (11), а отже, $(x(t), \dot{x}(t)) \notin \Omega_*$ або $(x(t), \dot{x}(t)) \in \Omega_*$ і $|x(t)| < |x_*|$ для всіх значень $t \in \mathbb{R}$.

Звідси випливає, що виконується одна з умов $(x_0, \dot{x}_0) \notin \Omega_*$ або $(x_0, \dot{x}_0) \in \Omega_*$ і $|x_0| \geq |x_*|$, де $(x_0, \dot{x}_0)$ — початкові умови, яким задовольняє розв'язок $x(t)$ при $t = t_0$. Зауважимо, що умови існування періодичних режимів системи (4), (11) для цього випадку (коли $\{t_k\} = \emptyset$) вказано вище (див. теорему 1).

Нехай послідовність $\{t_k, (x_k, \dot{x}_k)\}$, $k \in \mathbb{N}$, має нескінченну кількість елементів, тобто згаданий вище процес побудови послідовності $\{t_k, (x_k, \dot{x}_k)\}$, $k \in \mathbb{N}$, продовжується до нескінченності. Очевидно, що при цьому величини $(x_k, \dot{x}_k) = (x_*, \dot{x}_k) \in \Omega_*$ для всіх натуральних чисел k . Крім того, оскільки фазова точка системи (4), (11) нескінченне число раз перетинає пряму $x = x_*$ в точках з координатами $(x_*, \dot{x}_k)$, $k = 1, 2, \dots$, за якими визначається деяке відображення ϑ прямої $x = x_*$ в себе, то можна скористатися результатами статті [6], в якій для дослідження періодичних розв'язків диференціальних рівнянь з імпульсною дією використовується відображення Пуанкаре. Відображення Пуанкаре для задачі (4), (11) можна записати за допомогою формули

$$y_1 \xrightarrow{\vartheta} y_2 \xrightarrow{\vartheta} y_3 \xrightarrow{\vartheta} \dots \xrightarrow{\vartheta} y_{k-1} \xrightarrow{\vartheta} y_k \xrightarrow{\vartheta} \dots, \quad (21)$$

де $y_k = \dot{x}_k$, $k = 1, 2, \dots$, визначається формулами (20). Відображення (21) визначає деяке неперервне відображення частини прямої, що знаходиться в середині області Ω_* , а саме, відрізка $[-y_*, y_*]$, в цей же самий відрізок.

З проведеного вище аналізу випливає, що задача (4), (11) матиме періодичні режими, рухаючись якими, фазова точка зазнаватиме впливу імпульсних сил лише тоді, коли послідовність точок $\{t_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, є нескінченною і відображення Пуанкаре, побудоване за даними точками, має нерухомі (відмінні від $-y_*, y_*$) точки або ж періодичні точки деякого періоду n . Якщо відображення (21) має нерухомі (відмінні від $-y_*, y_*$) точки або ж періодичні точки деякого періоду n , $n > 1$, то задача (4), (11) буде мати періодичні траєкторії з періодом $T(n)$, при русі по яких фазова точка розглядуваної системи зазнає імпульсної дії рівно один або відповідно рівно n разів за період ($n > 1$).

Таким чином, справедлива така теорема.

Теорема 2. Нехай виконані умови 1 – 3, диференціальне рівняння Льєнара (11) є рівнянням типу S та для всіх $x_* \leq x \leq \xi$ виконується нерівність

$$\int_0^x \frac{g(s)}{|F(s)|} ds > \frac{1}{4}|F(x)|,$$

де $F(x) = \int_0^x f(s) ds$. Тоді рівняння (11) з імпульсною дією (4) має періодичні траєкторії

періоду $T(n)$ (n — натуральне), рухаючись якими, фазова точка системи (4), (11) зазнає імпульсної дії рівно n разів ($n \leq 1$) за період $T(n)$ тоді і тільки тоді, коли відображення Пуанкаре (21) має на інтервалі $(-y_*, y_*)$ нерухому або періодичну точку періоду n , де n — деяке натуральне число.

Доведення. Встановимо спочатку існування замкнених траєкторій рівняння (11). Для доведення цього факту розглянемо фазовий портрет рівняння (11) на площині Oxu . При $x = 0$ траєкторії рівняння (11) не є неперервно диференційовними. Побудуємо на цій площині сім'ю кривих

$$W(x, y) \equiv 2G(x) + y^2 = C, \quad C = \text{const}. \quad (22)$$

Криві (22) просто покривають [3] площину Oxu , тобто через кожну точку площини проходить одна і тільки одна крива сім'ї $W = C$, а отже, ця сім'я є топографічною системою [7] в сенсі Пуанкаре.

Нехай P_0 — точка інтервалу $(0, \tilde{y}_0)$ така, що $\tilde{y}_0 \leq \sqrt{2G(\xi)}$, та нехай L — інтегральна крива рівняння (11), що проходить через точку P_0 . Розглянемо рух фазової точки рівняння (11) вздовж кривої в напрямку зростання значень t . З (5) випливає, що значення x зростає до тих пір, доки крива L залишається у верхній півплощині і при цьому $\frac{dy}{dx} \leq 0$, внаслідок чого крива L наближається до осі Ox .

З огляду на співвідношення

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \{2G(x) + y^2\} = -2f(x)y^2 \leq 0$$

можна зробити висновок, що топографічна система кривих (22) перетинається інтегральними кривими при зменшенні параметра C . Тому крива L цілком лежить в області, обмеженої кривою $2G(x) + y^2 = \tilde{y}_0^2$, та входить в точку $P(\zeta, 0)$, що лежить на осі Ox , перпендикулярно до цієї осі.

В точці $(\zeta, 0)$ маємо

$$W(\zeta, 0) = 2G(\zeta) \leq W(0, \tilde{y}_0) = \tilde{y}_0^2 \leq 2G(\xi),$$

тобто $0 < \zeta \leq \xi$. Інтегральна крива, що виходить з точки P , при зростанні t увійде в нижню півплощину, де її абсциса монотонно спадає. Оскільки похідна y' додатна (або від'ємна), то ця крива знаходиться над (чи під) кривою, що визначається рівнянням

$$y = -\frac{g(x)}{f(x)} \leq -\frac{1}{4}F(x),$$

і тому інтегральна крива не може знову досягти осі Ox ніде, крім початку координат (рис. 2).

В той же час можна показати, що інтегральна крива не може увійти в початок координат. Справді, припустимо, що це відбулося. Тоді для $y < 0$ та $0 < x_* < x < \xi$ маємо співвідношення

$$\frac{dy}{dx} = -f(x) - \frac{g(x)}{y} \geq -\frac{f(x)}{y} \left(y + \frac{1}{4}F(x) \right).$$

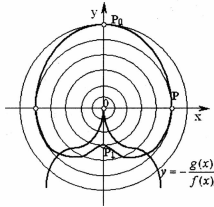


Рис. 2

Далі знаходимо

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y(x)}{F(x)} \right) \geq -\frac{f(x)}{yF^2(x)} \left[yF(x) + \frac{1}{4}F^2(x) + y^2 \right] = -\frac{f(x)}{yF^2(x)} \left[\left(y + \frac{1}{2}F(x) \right)^2 \right] > 0.$$

Звідси випливає, що при $x \rightarrow 0$ обмежена знизу функція $y(x)/F(x)$ спадає. Це означає, що існує границя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'(x)}{f(x)} = -\beta < 0,$$

де $-\beta \geq -1 + \frac{1}{4\beta}$, тобто $(\beta - 1/2)^2 \leq 0$, що неможливо. Тому інтегральна крива, котру ми розглядали, не може увійти в початок координат.

Таким чином, траєкторія системи (5) перетинає вісь ординат в деякій точці $P_1(0, \tilde{y}_1)$, де $\tilde{y} < 0$. Дуга $P_0 P P_1$ разом зі своїм дзеркальним відображенням відносно осі ординат утворюють цикл.

Доведення того факту, що для існування періодичних розв'язків задачі (4), (11) необхідно та достатньо, щоб відображення Пуанкаре мало нерухому точку періоду n , можна знайти в [6].

1. Самоїленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Выща шк., 1987. — 287 с.
2. Самоїленко В. Г., Елгондиев К. К. Про періодичні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь з імпульсною дією // Укр. мат. журн. — 1997. — 49, № 1. — С. 141–148.
3. Рейсінг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Физматлит, 1974. — 320 с.
4. Opial Z. Sur la stabilité des solutions périodiques et presque-périodiques de l'équation différentielle $\ddot{x} + F(\dot{x}) + g(x) = p(t)$ // Bull. Acad. pol. sci. Sér. Sci. math., astron. et. phys. — 1959. — 7. — P. 495–500.
5. Шустер Г. Детерминированный хаос. — М.: Мир, 1988. — 240 с.
6. Перестюк Н. А., Самоїленко В. Г., Елгондиев К. К. Отображение последования и периодические решения систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Нелінійні коливання. — 1998. — № 1. — С. 44–50.
7. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М., Л.: Гостехиздат, 1947. — 390 с.

Одержано 21.12.99